CAPES externe 2007 de Mathématiques
Première composition : CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une
préparation à la philosophie – *Isocrate*

1 Convergence de la suite (s_n)

1.1 Première méthode

a) Soit $k \geqslant 2$ un entier. Alors

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2-k}.$$

Or $k \geqslant 2 \Rightarrow k^2 - k \leqslant k^2$. En passant à l'inverse, nous avons bien que $\dfrac{1}{k^2-k} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

b) D'après ce calcul, nous pouvons dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} s_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &\leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &\leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est donc majorée, puisque $s_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

c) Pour montrer que cette suite converge, il suffit encore de démontrer qu'elle est monotone. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0.$$

Par suite, la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Etant de plus majorée, elle est convergente. Un majorant de sa limite est alors 2, puisque $s_n \leqslant 2$ pour tout $n \geqslant 1$.

1.2 Deuxième méthode

a) Nous avons trois propriétés à démontrer :

- ◇ On a déjà démontré plus haut que la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
- ◇ Montrons que la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$t_{n+1} - t_n = s_{n+1} + \frac{1}{n+1} - s_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0.$$

On en déduit donc le résultat recherché.

- ◇ Montrons enfin que leur différence tend vers 0. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$t_n - s_n = s_n + \frac{1}{n} - s_n = \frac{1}{n}.$$

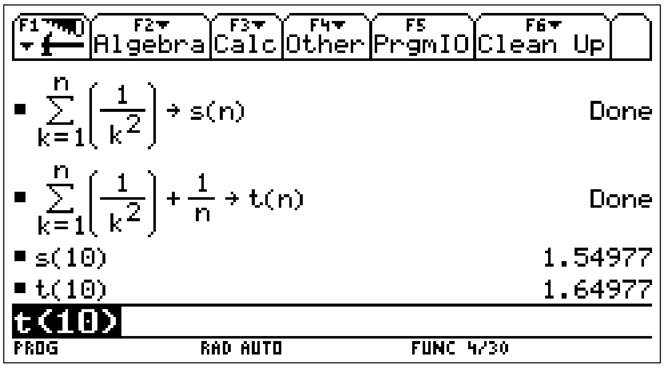
Le résultat est immédiat.

Les suites $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t_n)_{n\geqslant 1}$ sont donc adjacentes.

b) Il s'agit de trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $t_n - s_n \leqslant 10^{-1}$. Or

$$t_n - s_n \leqslant 10^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \leqslant 10^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant 10.$$

Il suffit alors de calculer s_{10} et t_{10} pour avoir l'encadrement recherché :



Comme le montre la capture d'écran de calculatrice ci-contre, on a bien

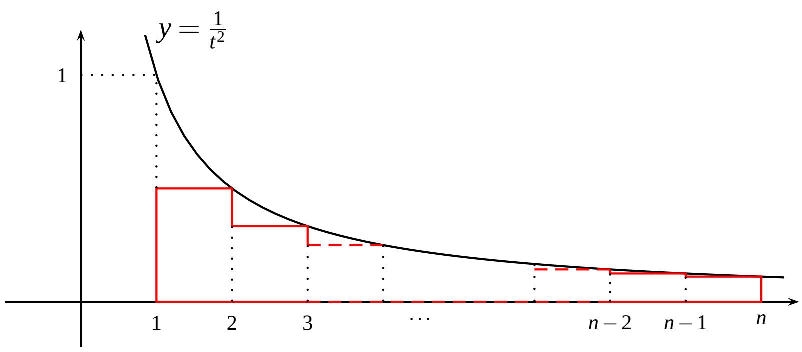
$$1,54977 \leqslant S \leqslant 1,64977.$$

1.3 Troisième méthode

Soit f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{t^2}. \end{array}$$

Le graphique ci-dessous est donné :



1. Quelle est l'aire de la surface rouge ?
2. Quelle est l'aire sous la courbe entre les abscisses 1 et n ? On la note $\mathscr{A}(n)$.
3. En déduire que la suite $(s_n)_{n\leqslant 1}$ de terme général

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

est majorée.

4. Montrer que cette suite est croissante.
5. En déduire qu'elle converge.

Solution :

1. L'aire de la surface rouge vaut $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.
2. $\mathscr{A}(n) = \int_1^n \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n}$.
3. On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$. D'où

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow s_n \leqslant 2 - \frac{1}{n},$$

   et par suite, notre suite est bien majorée, par 2.
4. Pour tout $n \geqslant 1$, on $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc cette suite est strictement croissante.
5. Toute suite croissante et majorée converge, donc notre suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ est bien convergente.

2 Utilisation de polynômes

1. P s'écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = a_n(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n)$. En identifiant les coefficients des polynômes, en particulier le coefficient de X^{n-1}, on trouve

$$a_n(-\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n) = a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

   qui est la formule recherchée.

2. (a) Pour démontrer cette égalité, nous avons besoin de la proposition c-dessous, que nous allons démontrer :

Proposition : Pour tout entier naturel n et tout réel x, on a

$$\sin(nx) = \Im\mathrm{m}\big((\cos x + i \sin x)^n\big).$$

démonstration *: En effet,*

$$\begin{aligned} \Im\mathrm{m}\big((\cos x + i \sin x)^n\big) &= \Im\mathrm{m}\big((e^{ix})^n\big) \\ &= \Im\mathrm{m}(e^{inx}) \quad \textit{par la formule de Moivre} \\ &= \Im\mathrm{m}\big(\cos(nx) + i \sin(nx)\big) = \sin(nx). \end{aligned}$$

■

Puisque $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, nous allons appliquer ce résultat à $x = \varphi$ et $n = p$, nous permettant d'utiliser la formule du binôme de Newton pour avancer :

$$\begin{aligned} \sin\big((2p+1)\varphi\big) &= \Im\mathrm{m}\big((\cos\varphi + i \sin\varphi)^{2p+1}\big) \\ &= \Im\mathrm{m}\left[\sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} i^j \sin^j(\varphi) \cos^{2p+1-j}(\varphi)\right]. \end{aligned}$$

Or pour tout valeur paire de j, le terme i^j est réel. Par conséquent, la partie imaginaire que l'on recherche s'obtient en ne considérant que les valeurs de j impaires :

$$\begin{aligned}
\sin\big((2p+1)\varphi\big) &= \Im\mathrm{m}\left[\sum_{\substack{j\,=\,0|\\ j \text{ impair}}}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} i^j \sin^j(\varphi)\cos^{2p+1-j}(\varphi)\right] \\
&= \sum_{2k+1\in I} \binom{2p+1}{2k+1} \operatorname{signe}(i^{2k+1}) \cos^{2p+1-(2k+1)}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi) \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi),
\end{aligned}$$

où $I=\{1,3,5,\ldots,2p+1\}$. Nous avons utilisé le changement de variables $j=2k+1$ après le second symbole d'égalité. Le résultat est ainsi démontré.

(b) Toujours pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $\varphi\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin\big((2p+1)\varphi\big) &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2p+1-2p+2k}(\varphi) \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi)\frac{1}{\sin^{2p-2k}(\varphi)}\sin^{2p+1}(\varphi) \\
&= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \operatorname{cotan}^{2p-2k}(\varphi) \\
&= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \big(\operatorname{cotan}^2(\varphi)\big)^{p-k}.
\end{aligned}$$

3. (a) Soit $k\in\{1,\ldots,p\}$. Alors d'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
P(\gamma_k) &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k} \\
&= \frac{\sin\left((2p+1)\,\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0.
\end{aligned}$$

(b) Soit $k\in\{1,\ldots,p\}$. Alors nous avons la succession d'implications suivantes :

$$\begin{aligned}
1\leqslant k\leqslant p &\Leftrightarrow \pi\leqslant k\pi\leqslant p\pi \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{2p+1}\leqslant\frac{k\pi}{2p+1}\leqslant\frac{p\pi}{2p+1} \quad (\text{car } 2p+1>0) \\
&\Rightarrow 0<\frac{k\pi}{2p+1}\leqslant\frac{p\pi}{2p+1}.
\end{aligned}$$

Or

$$p<\frac{2p+1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{p}{2p+1}<\frac{1}{2},$$

donc on a finalement que

$$1 \leqslant k \leqslant p \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}.$$

De plus, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,

$$k < k+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{(k+1)\pi}{2p+1},$$

ce qui suffit à affirmer que toutes les racines γ_k de P (d'après la question *a*) sont distinctes.

(c) Aidons nous de la question 1 pour déduire que la première somme recherchée est égale à l'opposé du quotient du coefficient de X^{p-1} par celui de X^p :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= -\frac{(-1)^1\binom{2p+1}{3}}{(-1)^0\binom{2p+1}{1}} = \frac{(2p+1)!}{3!\,(2p+1-3)!}\frac{1}{2p+1} \\ &= \frac{(2p)!}{3!\,(2p-2)!} = \frac{(2p-1)(2p)}{2\cdot 3} = \frac{p(2p-1)}{3}.\end{aligned}$$

Nous pouvons alors poursuivre nos calculs :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\cos^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} - 1\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}\right) - p = \frac{p(2p-1)}{3} \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} &= \frac{p(2p-1)}{3} + p = \frac{p(2p+2)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.\end{aligned}$$

4. (a) Pour cette question, on définit sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ les fonctions f et g respectivement par $f(\varphi) = \sin\varphi$ et $g(\varphi) = \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. De plus, on a pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(0) = g(0) = 0$, ainsi que

$$f'(\varphi) = \cos(\varphi) \qquad \text{et} \qquad g'(\varphi) = \frac{\cos^2(\varphi)\varphi - \sin^2(\varphi)}{\cos^2\varphi} = \frac{1 - 2\sin^2(\varphi)}{\cos^2\varphi},$$

ce qui nous permet d'affirmer que ces courbes admettent la même tangente au point d'abscisse nulle, de fonction affine associée égale à à $T(\varphi) = \varphi$.

On sait que les courbes représentatives de f et g sont respectivement concave et convexe sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, ce qui implique que la tangente déterminée ci-dessous se trouve en-dessous de la courbe représentant g et au-dessus de celle qui représente f. En d'autre termes, pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi.$$

La première inégalité provient du fait que si $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\sin\varphi \in]0, 1[$.

(b) Soient $p \geqslant 1$ et $k \in \{1, \ldots, p\}$. Alors (en utilisant les résultats de la question 3.c),

$$\begin{aligned}
0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi \quad & \Leftrightarrow \quad 0 < \operatorname{cotan}\varphi < \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\sin\varphi} \Leftrightarrow 0 < \operatorname{cotan}^2\varphi < \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\sin^2\varphi} \\
& \Rightarrow \quad \forall\, k, \quad 0 < \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2} < \sin^{-2}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \forall\, k, \quad \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\,\frac{1}{k^2} < \sin^{-2}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \\
& \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \sum_{k=1}^{p} \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\,\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{p} \sin^{-2}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}.
\end{aligned}$$

(c) En poursuivant nos calculs, la double inégalité précédente est équivalente à

$$\frac{\pi^2}{3}\,\frac{2p^2(1-\frac{1}{2p})}{4p^2(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{4p^2})} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{3}\,\frac{2p^2(1+\frac{1}{p})}{4p^2(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{4p^2})}.$$

Par la théorème d'encadrement, on en déduit que

$$S = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On montre facilement que les suites $\left(\frac{1}{(2k)^2}\right)_{k\geqslant 1}$ et $\left(\frac{1}{(2k+1)^2}\right)_{k\geqslant 0}$ sont équivalentes à $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geqslant 1}$ (c'est-à-dire que le quotient de leur terme général tend vers 1 lorsque k tend vers l'infini). Comme ce sont trois suites à termes positifs, la règle des équivalents nous permet d'affirmer que (u_n) et (v_n) sont de même nature que (s_n), et convergent donc. De plus, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2} = 0$, donc la suite w_n converge par le critère des séries alternées.

Dans la suite, n désigne un entier naturel strictement positif. On a alors

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{\pi^2}{24}.$$

Concernant la seconde suite,

$$u_n + v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \;\Rightarrow\; v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - u_n \;\Rightarrow\; V = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Un raisonnement analogue nous amène à écrire que

$$w_n = u_n - v_n \quad \Rightarrow \quad W = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

3 Utilisation des intégrales de Wallis

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$.

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$, $u(t) = \cos^{2n+1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, on peut donc utiliser le théorème d'intégration par parties afin de calculer I_{n+1}, en utilisant $u'(t) = -(2n+1)\sin(t)\cos^{2n}(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$:

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)\,v'(t) \, \mathrm{d}t = [u(t)\,v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)\,v(t) \, \mathrm{d}t \\
&= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2n}(t) \, \mathrm{d}t = (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos^2(t)\big)\cos^{2n}(t) \, \mathrm{d}t \\
&= (2n+1)\,I_n - (2n+1)\,I_{2n+1} \\
\Leftrightarrow\quad (2n+2)\,I_{n+1} &= (2n+1)\,I_n \quad\Leftrightarrow\quad I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,I_n.
\end{aligned}$$

(b) Effectuons une récurrence pour montrer ce résultat :

initialisation ($n = 0$) : La question 1 nous assure que les deux membres sont bien égaux à $\pi/2$.

hérédité : Supposons l'hypothèse de récurrence (H.R.) vraie au rang n, et montrons qu'elle l'est toujours au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &\overset{2.b}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\,I_n \overset{\text{H.R.}}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4(n+1)^2\,4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}\big((n+1)!\big)^2}\,\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout entier naturel n, $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit $n \geqslant 1$.

(a) Une première intégration par parties utilisant les fonctions $u(t) = \cos^{2n}(t)$ et $v(t) = t$ de classe $\mathscr{C}^1$ donne :

$$I_n = [t\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t) \, \mathrm{d}t = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Une seconde intégration par parties, en utilisant les fonction $U(t) = \sin(t)\cos^{2n-1}(t)$ et $v(t) = t^2/2$ de classe $\mathscr{C}^1$, donne :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n}{2}[t^2\sin(t)\cos^{2n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\big(1-2n(\sin^2 t)\big)(\cos^{2n-2} t) \, \mathrm{d}t \\
&= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2nt^2\sin^2 t\cos^{2n-2} t \, \mathrm{d}t - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2} t \, \mathrm{d}t \\
&= 2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2} t \, \mathrm{d}t - 2n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n} t \, \mathrm{d}t - n\,J_{n-1} \\
&= (2n^2-n)\,J_{n-1} - 2n^2\,J_n = n(2n-1)\,J_{n-1} - 2n^2\,J_n.
\end{aligned}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
& K_{n-1}-K_n = \frac{4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2}{\big(2(n-1)\big)!}\,J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\,J_n \\
\Leftrightarrow\ & K_{n-1}-K_n = \frac{(2n-1)(2n)4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\,J_{n-1} - 4^n (n!)^2\,J_n}{(2n)!} \\
\Leftrightarrow\ & (2n)!\,(K_{n-1}-K_n) = 4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\big((2n-1)(2n)\,J_{n-1} - 4n^2\,J_n\big) \\
\Leftrightarrow\ & (2n)!\,(K_{n-1}-K_n) = 2\cdot 4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\,I_n \\
\Leftrightarrow\ & (2n)!\,(K_{n-1}-K_n) = 2\cdot 4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow\ & K_{n-1}-K_n = \frac{4^{n-1}\big((n-1)!\big)^2\pi}{4^n(n!)^2} = \frac{\pi}{4n^2}.
\end{aligned}$$

(c) Par suite, on a

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k^2} = \sum_{k=1}^{n} K_{k-1}-K_k = K_0 = K_n = J_0 - K_n.$$

En effet, la définition de K_n pour tout entier naturel n nous permet d'affirmer que $K_0 = J_0$.

4. (a) Nous avons déjà démontré plus haut que tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiait $x < \sin x$.Or $\frac{\pi}{2} \geqslant 1$, donc $x < \frac{\pi}{2}\sin x$. De plus, il y a égalité pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x.$$

(b) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors

$$\begin{aligned}
0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x^2\cos^{2n}x \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x\,\cos^{2n}x \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}x\,\mathrm{d}x\right) \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}) \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{2n+2} I_n \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8(n+1)} I_n.
\end{aligned}$$

Il vient ensuite que

$$\begin{aligned}
0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8(n+1)} I_n \quad & \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,J_n \leqslant \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{\pi^2}{8(n+1)}\,I_n \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,\frac{\pi^2}{8(n+1)}\,\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant K_n \leqslant \frac{\pi^3}{16(n+1)}.
\end{aligned}$$

(c) On en déduit les implications suivantes, amorcées par le théorème d'encadrement :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} K_n = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 = \frac{\pi^3}{24} \\ &\Rightarrow \quad S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^3}{24}\,\frac{4}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

4 Noyau de Dirichlet

1. Soient $n \geqslant 1$ un entier et $x \not\equiv 0\ [2\pi]$ un réel. Alors

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} \left(e^{ix}\right)^{-n} \left(e^{ix}\right)^{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{ix}\right)^{-n} \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{2n+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{1}{2} \frac{\left(e^{ix}\right)^{-n-1/2}}{\left(e^{ix}\right)^{-1/2}} \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{2n+1}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(e^{ix}\right)^{-n-1/2} - \left(e^{ix}\right)^{n+1/2}}{\left(e^{ix}\right)^{-1/2} - \left(e^{ix}\right)^{1/2}} = \frac{1}{2} \frac{-2i\ \sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{-2i\ \sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier.

   (a) 2.a. Soit $k \geqslant 1$ un entier. En faisant une intégration par parties à l'aide des fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{\sin(kx)}{k}$ de classe $\mathscr{C}^1$, nous obtenons :

$$\int_0^{\pi} x\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k}[x\sin(kx)]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \sin(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}\ [\cos(kx)]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}.$$

   Nous remarquons que cette intégrale est nulle pour toute valeur de k paire. On en déduit que :

$$\int_0^{\pi} x\cos(kx)\ \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ -\dfrac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

   (b) Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x D_n(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \frac{x}{2} + x \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\ \mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{n} x\cos(kx)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} x\cos(kx)\ \mathrm{d}x \qquad \left(\begin{array}{c}\text{l'échange des symboles est possible} \\ \text{car la somme et l'intégrale sont finies}\end{array}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

3. Notons $\widehat{f}$ la fonction donnée dans l'énoncé. Il est clair que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ en tant que quotient de deux fonctions de même classe. $\widehat{f}$ est donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$ sur cette intervalle.

   Déterminons alors si $\widehat{f}$ admet une limite en 0 :
$$\frac{x}{\sin(\frac{x}{2})} = 2\,\frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \widehat{f}(x) = 2\lim_{X\to 0}\frac{X}{\sin X} = 2.$$
   Nous pouvons désormais définir la fonction f sur $[0,\pi]$ par
$$f(x) = \begin{cases} \widehat{f}(x) & \text{si} \quad x>0, \\ 2 & \text{si} \quad x=0. \end{cases}$$
   Il ne reste plus qu'à vérifier que f est dérivable en 0, et que f' y est continue. f est dérivable sur $]0,\pi]$, et pour tout x de cet intervalle, on a
$$f'(x) = \frac{\sin(\frac{x}{2}) - \frac{x}{2}\cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$
   On applique alors un développement limité de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0 afin d'obtenir
$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}{\frac{x^2}{4} + o(x^3)} = \frac{\frac{x^3}{16} + o(x^3)}{\frac{x^2}{4} + o(x^3)} \;{}_0\frac{x}{4}.$$
   Il s'en suit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. Par le théorème de polongement de la dérivée, on peut enfin conclure que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, avec $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

4. On utilise une intégration par partie en utilisant les fonctions $u(x) = \phi(x)$ et $v(x) = -\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$:
$$\begin{aligned} \int_0^\pi \phi(x)\ \sin(\lambda x)\ \mathrm{d}x &= \left[-\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\ \phi(x)\right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \phi'(x)\ \cos(\lambda)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\cos(\lambda\pi)\,\phi(\pi)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \phi'(x)\ \cos(\lambda)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$
   Puisque les fonctions ϕ et ϕ' sont continues sur $[0,\pi]$, il existe deux réels m et M tels que pour tout $x\in[0,\pi]$, $m \leqslant \phi(x) \leqslant M$ et $m \leqslant \phi'(x) \leqslant M$. De plus, le cosinus est toujours compris entre -1 et 1. On en déduit donc que les deux premiers termes ci-dessus tendent vers 0 lorsque λ tend vers l'infini, ainsi que le troisième puisque l'intégrale est bornée, d'où le résultat.

5. (a) On a donc, en utilisant $\phi(x) = f(x)$,
$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\pi \phi(x)\ \sin(\lambda x)\ \mathrm{d}x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \phi(x)\ \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\ \mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \frac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\ \mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi x\,D_n(x)\ \mathrm{d}x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} L_n = 0. \end{aligned}$$

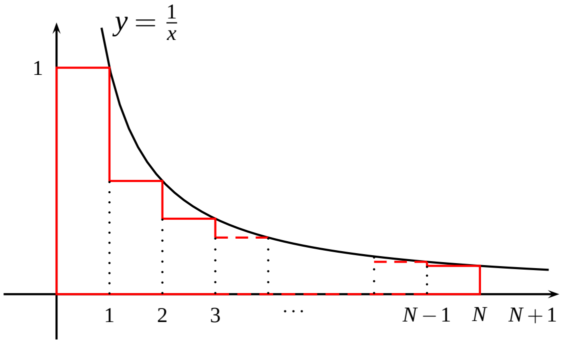
(b) En poursuivant nos calculs, sachant que $W = -\frac{\pi^2}{12} = -\frac{1}{2}S$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} L_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\right) = 0$$
$$\iff \frac{\pi^2}{4} - S + W = 0 \iff \frac{\pi^2}{4} - S - \frac{1}{2}S = 0$$
$$\iff \frac{\pi^2}{4} = \frac{3}{2}S \iff S = \frac{2\pi^2}{4\cdot 3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On retrouve ainsi la valeur de S.

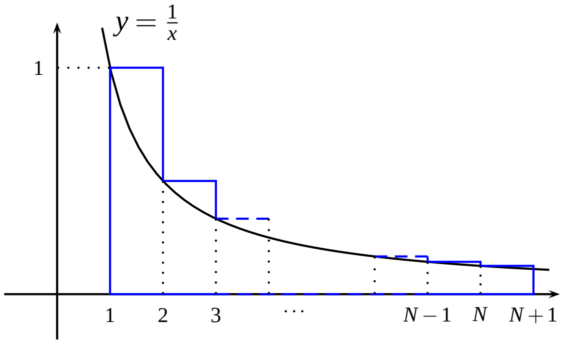
5 Une somme double

1. (a) Soit $N \geqslant 1$ un entier. Nous allons utiliser, comme lors de la première partie, une comparaison à une intégrale :



L'aire rouge correspond à H_N, et la bleue à $1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Par conséquent,

$$H_N \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$



L'aire bleue correspond aussi à H_N, tandis que l'aire sous la courbe vaut $\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

D'où $\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant H_N$.

Nous avons donc

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant H_N \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\iff\quad \ln(1+N) \leqslant H_N \leqslant 1 + \ln(N).$$

(b) N étant un nombre positif, on peut diviser cette inégalité par N :

$$\frac{\ln(1+N)}{N} \leqslant \frac{H_N}{N} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{\ln(N)}{N}.$$

Les croissances comparées à l'infini nous assurent que $\lim_{N\to\infty}\frac{\ln(1+N)}{N} = 0$ et $\lim_{N\to\infty}\frac{\ln(N)}{N} = 0$, et c'est le théorème d'encadrement qui permet ainsi d'arriver au résultat attendu :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{H_N}{N} = 0.$$

(c) Nous allons démontrer ce résultat par récurrence :

Initialisation ($M=2$) : Le membre de gauche vaut $\dfrac{H_1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$, et celui de droite vaut

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{H_2}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

L'égalité est donc vérifiée pour $M=2$.

Hérédité : Supposons l'hypothèse de récurrence (HR) vraie au rang M, et montrons qu'elle l'est encore au rang $M+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{M}\frac{H_m}{m(m+1)} &= \sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}+\frac{H_M}{M(M+1)} \overset{\text{HR}}{=} \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M}+\frac{H_M}{M(M+1)}\\
&= \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M}\left(1-\frac{1}{M+1}\right)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}\\
&= \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\left(\frac{H_{M+1}}{M+1}-\frac{\frac{1}{M+1}}{M+1}\right)=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_{M+1}}{M+1}+\frac{1}{(M+1)^2}\\
&= \sum_{m=1}^{M+1}\frac{1}{m^2}-\frac{H_{M+1}}{M+1}.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant : pour tout $M\geqslant 2$ entier,

$$\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M}.$$

(d) Le premier terme du membre de droite converge lorsque M tend vers l'infini, de limite S. Le second converge aussi d'après la question b. On en déduit que

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}=S.$$

2. Soient N un entier naturel non nul.

(a) Soit m un entier quelconque, supérieur ou égal à 2. Nous allons faire une récurrence sur N.

Initialisation ($N=1$) : Par la définition de $Z_{N,m}$, on a :

$$Z_{1,m}=\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n(n+m-1)}=\frac{1}{m-1}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m-1}\left(H_{m-1}-\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\\
&= \frac{1}{m-1}\,\frac{m-1}{m}=\frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $Z_{1,m}=\dfrac{1}{m-1}\left(H_{m-1}-\displaystyle\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\right)$, de sorte que le rang $N=1$ soit vérifié.

Hérédité : Supposons maintenant le résultat vrai au rang N, et montrons qu'il l'est encore au rang $N+1$. Nous utiliserons la démonstration pour amorcer le raisonnement :

$$\begin{aligned}
Z_{N+1,m} &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)} + \frac{1}{(N+1)\big((N+1)+m-1\big)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)} + \frac{1}{m-1}\frac{m-1}{(N+1)(N+m)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)} + \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+m}\right) \\
&\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+m}\right) \\
&= \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+2}^{N+m}\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=(N+1)+2}^{(N+1)+m-1}\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

L'hyptohèse de récurrence est donc vraie au rang $N+1$.

Le résultat est donc démontré, et on a donc que pour tout entier $m \geqslant 2$,

$$Z_{n,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right).$$

(b) Pour tout entier n strictement positif, $n \geqslant N+1 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N+1}$. D'où

$$0 < \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{N+1} \leqslant \frac{m-1}{N+1}.$$

Grâce au théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n} = 0,$$

ce qui implique directement que

$$\lim_{N\to\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}.$$

3. (a) Soient $N \geqslant 1$ et $M \geqslant 2$ deux entiers. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{nm(n+m-1)} \qquad \text{(sommes finies)} \\
&= \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)} \\
&= \frac{1}{1}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1-1)} + \sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}.
\end{aligned}$$

Nous avons du séparer le premier terme (correspondant à $m = 1$) de la somme car $Z_{N,m}$ n'est pas défini pour $m = 1$.

(b) Les sommes étant finies, nous pouvons aussi échanger les symboles $\sum$ et lim :

$$\lim_{N\to\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m} = \sum_{m=2}^{M} \lim_{N\to\infty} \frac{Z_{N,m}}{m} = \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)},$$

d'où le résultat suivant (connaissant déjà $S = \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$) :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m} \right) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}.$$

(c) D'après 1.d, nous savons déjà que

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)} = S.$$

On en déduit que

$$\lim_{M\to\infty} \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} \right) = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)} \right) = \frac{2\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

6 La fonction Dilogarithme

1. Pour $x \in [-1,1[-\{0\}$, il n'y a pas de problème : la fonction dans l'intégrale est continue. De plus, $\ln(1-t)$ est équivalent en 0 à $\frac{1}{t}$, ce qui rend la fonction dans l'intégrale équivalente en 0 à -1, c'est-à-dire prolongeable par continuité, et elle est donc intégrable.

2. Notons φ la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\lim_{t\to1} \frac{\ln(1-t)}{t} = -\lim_{t\to1} \frac{\varphi(1-t)-\varphi(1)}{(1-t)-1} = -\varphi'(1) = -1,$$

donc l'intégrale impropre $\mathrm{Li}(x)$ existe bien en 1, et $\mathrm{Li}(1) = \lim_{t\to1} \mathrm{Li}(x)$.

3. (a) Soit $x \in]-1,1[$. Posons $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Rappelons avant tout que

$$\forall\, x < |1|, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} & f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x) \\ \Rightarrow \quad & f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f(x) = \mathrm{Li}(x) \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Li}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}. \end{aligned}$$

(b) Par conséquent,

$$\mathrm{Li}(1) = \lim_{x\to 1} \mathrm{Li}(x) = \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. (a) Soit $x \in]0,1[$. On rappelle que pour deux fonctions f et g dérivables, on peut avoir

$$(f\circ g)'(x) = (f'\circ g)(x)\,g'(x).$$

Cette formule peut être appliquée ici car la fonction $x \longmapsto 1-x$ renvoie un nombre lui aussi strictement compris entre 0 et 1. Par suite,

$$\begin{aligned}\big(\,\mathrm{Li}(x) + \,\mathrm{Li}(1-x)\big)' &= \mathrm{Li}'(x) + \,\mathrm{Li}'(1-x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \left(-\frac{\ln(1-(1-x))}{1-x}(-1)\right)\\ &= \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.\end{aligned}$$

(b) Posons, pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = -\ln(1-x)\ln(x)$. Soit $x \in]0,1[$. Alors

$$g'(x) = -\left(\frac{-1}{1-x}\ln(x) + \ln(1-x)\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Par suite, $g'(x) = \big(\,\mathrm{Li}(x) + \,\mathrm{Li}(1-x)\big)'$, donc $\,\mathrm{Li}(x) + \,\mathrm{Li}(1-x) = g(x) + C$, où C est une constante que l'on va déterminer.

En faisant tendre x vers 0, on trouve que $\lim_{x\to 0} \mathrm{Li}(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} \mathrm{Li}(x) = \frac{\pi^2}{6}$. De plus,

$$e^{g(x)} = e^{-\ln(x)\ln(1-x)} = (1-x)^{-\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1,$$

donc $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. On en déduit directement que

$$C = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Appliquons la formule précédente au réel $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Li}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln 2\left(\frac{1}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \ln^2(2)\\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2(2)}{2}.\end{aligned}$$

6. (a) Soit $x \in]-1,1[$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\big(\,\mathrm{Li}(x) + \,\mathrm{Li}(-x)\big)' &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \left(-\frac{\ln(1+x)}{-x}(-1)\right)\\ &= -\frac{\ln(1-x) - \ln(1+x)}{x} = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}.\end{aligned}$$

De plus,

$$\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^2)\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,(2x)\right) = -\frac{\ln(1-x^2)}{x}.$$

Ces deux dérivées sont égales, nousen déduisons donc que

$$\mathrm{Li}(x)+\mathrm{Li}(-x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^2 = +C,$$

avec C une constante que l'on détermine en remplaçant x par 0 dans les deux membres. Puisque $\mathrm{Li}(0)=0$, on trouve $C=0$, et le résultat s'en suit.

(b) Dans cette égalité, il suffit alors de faire tendre x vers 1 afin de trouver

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\mathrm{Li}(x)+\mathrm{Li}(-x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(x^2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6}\\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

7. (a) Dérivons le membre de gauche. On trouve pour tout réel $x\in\,]0,1[$:

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{Li}(x)-\mathrm{Li}(-x)+\mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right)\right)'\\ = \;& -\frac{\ln(1-x)}{x}-\left(-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)+\frac{2}{1-x^2}\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)-\frac{2}{1-x^2}\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)\\ = \;& \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{2}{1-x^2}\ln x\\ = \;& \big(\ln(x)\big)'\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\ln x\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)'.\end{aligned}$$

Par intégration, on en déduit que

$$\mathrm{Li}(x)-\mathrm{Li}(-x)+\mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln x + C,$$

avec C une constante que l'on détermine en faisant tendre x vers 0 dans les deux membres. Puisque $\mathrm{Li}(0)=0$, on obtient :

$$\mathrm{Li}(1)-\mathrm{Li}(-1) = C \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{4}.$$

On trouve bien le résultat demandé.

(b) Appliquons la formule précédente au cas particulier $x = \sqrt{2} - 1 \in]0,1[$. On trouve :

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) + \mathrm{Li}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)\ln(\sqrt{2}-1) \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) + \mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2}) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}^2-1^2}\right)\ln(\sqrt{2}-1) \\
\Leftrightarrow\ & 2\left(\mathrm{Li}(\sqrt{2}-1) - \mathrm{Li}(1-\sqrt{2})\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1) \\
\overset{6.3.a}{\Leftrightarrow}\ & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-\sqrt{2})^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^k}{k^2} + \frac{(-1)^k(1-\sqrt{2})^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1).
\end{aligned}
$$

Lorsque k est pair, chaque terme de la somme est nul. La somme peut donc se faire uniquement sur les k impairs. En posant $k = 2n+1$, on trouve finalement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\ln(\sqrt{2}-1).$$