
CAPES externe 2007 de Mathématiques
Deuxième composition : CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une
préparation à la philosophie – *Isocrate*

Introduction

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et on définit la norme d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Soit a un vecteur de \mathbb{R}^n non nul, on note s_a la symétrie orthogonale de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad s_a(x) = x - 2 \frac{\langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

On dit qu'une partie R de \mathbb{R}^n est un *système de racines* dans \mathbb{R}^n si elle vérifie les conditions suivantes :

- la partie R est finie, ne contient pas 0 et engendre le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n ;
- pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha(R) = R$ (en particulier, $-\alpha \in R$) ;
- pour tous $\alpha, \beta \in R$, $n_{\alpha, \beta} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$;
- pour tout $\alpha \in R$, les seuls éléments de R proportionnels à α sont α et $-\alpha$.

Les coefficients $n_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta \in R$) sont appelés les *coefficients de structure* du système de racines R .

On dit que deux systèmes de racines R et R' sont des *systèmes de racines isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\varphi(R) = R' \quad \text{et} \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad n_{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)} = n_{\alpha, \beta}.$$

Dans la partie I, on étudie les systèmes de racines du plan. Cette partie permet de se familiariser avec cette notion et d'avoir des exemples sur lesquels s'appuyer pour la suite du problème. Puis dans la partie II, on étudie des relations d'ordre total compatibles avec la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Cette partie est indépendante de la partie I. Ces relations d'ordre permettront, dans la partie III, d'extraire d'un système de racines une base de \mathbb{R}^n . Même si le fait d'avoir traité la partie I permet de mieux aborder celle-ci, le seul résultat utile est rappelé en début de la partie III et pourra être admis. Seule la dernière question dépend de la partie I. La partie IV est consacrée à l'étude d'un groupe engendré par les symétries associées à un système de racines. On montrera que les symétries associées à une base suffisent à engendrer le groupe. Pour cela, on utilisera des résultats établis dans la partie III. Ensuite, dans la partie V, on étudiera les groupes diédraux et on montrera qu'ils sont engendrés par deux éléments d'ordre 2. Cette partie est indépendante de ce qui précède (sauf pour traiter la dernière question). Dans la partie VI, on associe à un système de racines un ensemble de parties connexes de \mathbb{R}^n sur lesquelles agit le groupe défini dans la partie IV. On montre ensuite, par des arguments de dualité et de topologie, que toutes les bases extraites du système de racines sont en bijection avec ces connexes. Cette partie se finit en montrant que le groupe agit simplement transitivement sur l'ensemble de ces connexes et sur l'ensemble des bases du système de racines.

1 Systèmes de racines dans \mathbb{R}^n

Dans cette partie, on supposera $n = 2$. Soit R un système de racines de \mathbb{R}^2 . Pour $\alpha, \beta \in R$, on note $\theta_{\alpha, \beta}$ l'angle géométrique entre α et β , i.e. le nombre réel compris entre 0 et π défini par

$$\cos(\theta_{\alpha, \beta}) = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\alpha\| \|\beta\|}.$$

1. Soient $\alpha, \beta \in R$.

(a) Montrer que $n_{\alpha, \beta} n_{\beta, \alpha} = 4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta})$.

Remarquons que la commutativité de la multiplication dans \mathbb{R} entraîne celle du produit scalaire. Autrement dit, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. On a alors

$$n_{\alpha, \beta} n_{\beta, \alpha} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 4 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle^2}{\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2} = 4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}).$$

(b) En déduire les valeurs possibles de $\theta_{\alpha, \beta}$.

Puisque $\alpha, \beta \in R$, on a $n_{\alpha, \beta}, n_{\beta, \alpha} \in \mathbb{Z}$, donc $4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) \in \mathbb{Z}$. Or $0 \leq \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) \leq 1$, ce qui implique que $4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) \in \{0, \dots, 4\}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} 4 \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) &\in \{0, \dots, 4\} \\ \Leftrightarrow \cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) &\in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\} \\ \Leftrightarrow \cos(\theta_{\alpha, \beta}) &\in \left\{-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\} \\ \Leftrightarrow \theta_{\alpha, \beta} &\in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}. \end{aligned}$$

La dernière équivalence provient du fait que $\theta_{\alpha, \beta}$ se trouve par définition dans $[0, \pi]$.

(c) Montrer que le couple $(n_{\alpha, \beta}, n_{\beta, \alpha})$ ne peut pas prendre les valeurs $(1, 4)$, $(4, 1)$, $(-1, -4)$ et $(-4, -1)$.

Supposons que $(n_{\alpha, \beta}, n_{\beta, \alpha}) = (1, 4)$ ou $(n_{\alpha, \beta}, n_{\beta, \alpha}) = (-1, -4)$.

◇ Nous avons d'une part que

$$n_{\alpha, \beta} = \pm 1 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \pm \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} \quad \text{et} \quad n_{\beta, \alpha} = \pm 4 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \pm 2 \langle \beta, \beta \rangle$$

impliquent

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 4 \langle \beta, \beta \rangle \Leftrightarrow \|\alpha\|^2 = 4 \|\beta\|^2 \Leftrightarrow \|\alpha\| = 2 \|\beta\|. \quad (\text{b})$$

◇ D'autre part, nous avons que $n_{\alpha, \beta} = \pm 1$ et $n_{\beta, \alpha} = \pm 4$ impliquent que

$$\cos^2(\theta_{\alpha, \beta}) = 1 \Rightarrow \cos(\theta_{\alpha, \beta}) = \pm 1 \stackrel{\theta_{\alpha, \beta} \in [0, \pi]}{\Rightarrow} \theta_{\alpha, \beta} = 0 \text{ ou } \theta_{\alpha, \beta} = \pi. \quad (\text{\#})$$

(b) et (#) impliquent que β est proportionnel à α , mais de norme différente : cela contredit le fait que les seuls éléments de R proportionnels à α sont α et $-\alpha$. Donc il n'est pas possible que l'on ait $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) = (1, 4)$ ou $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) = (-1, -4)$.

En échangeant les rôles de α et β , on montre de manière analogue que $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) \neq (4, 1)$ et $(n_{\alpha,\beta}, n_{\beta,\alpha}) \neq (-4, -1)$.

- (d) Pour $\theta_{\alpha,\beta} \neq \frac{\pi}{2}$, montrer que $\frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2} = \frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}}$ et en déduire les valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$.

Remarquons que

$$\theta_{\alpha,\beta} \neq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n_{\alpha,\beta} n_{\beta,\alpha} \neq 0 \Leftrightarrow n_{\alpha,\beta} \neq 0 \text{ et } n_{\beta,\alpha} \neq 0,$$

donc le quotient $n_{\beta,\alpha}/n_{\alpha,\beta}$ est bien défini. On a alors :

$$\frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}} = \frac{2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle}}{2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}} = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\|\beta\|^2} \cdot \frac{\|\alpha\|^2}{\langle \alpha, \beta \rangle} = \frac{\|\alpha\|^2}{\|\beta\|^2}.$$

On en déduit alors les valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ grâce au tableau 1 page suivante. La dernière ligne s'explique par le fait que si $\alpha, \beta \neq 0$, alors

$$n_{\alpha,\beta} = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 0 \Leftrightarrow n_{\beta,\alpha} = 0.$$

- (e) En supposant $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, présenter sous forme d'un tableau, les différentes valeurs de $n_{\alpha,\beta}$, $n_{\beta,\alpha}$, $\theta_{\alpha,\beta}$ et $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$.

On suppose maintenant que $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$. On fera bien attention au fait qu'on demande maintenant (en particulier) la valeur du quotient $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$, et non son inverse. Il suffit donc de reprendre le tableau ci-dessous, en supprimant les lignes où $n_{\beta,\alpha} > n_{\alpha,\beta}$, donnant le tableau 2.

$\theta_{\alpha,\beta}$	$4 \cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$	$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\frac{\ \alpha\ }{\ \beta\ } = \sqrt{\frac{n_{\beta,\alpha}}{n_{\alpha,\beta}}}$
0	4	-2	-2	1
0	4	2	2	1
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	-1	-3	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	1	3	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	-3	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	3	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	-1	-2	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	1	2	$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	-2	-1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	-1	-1	1
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	1	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	non déterminé

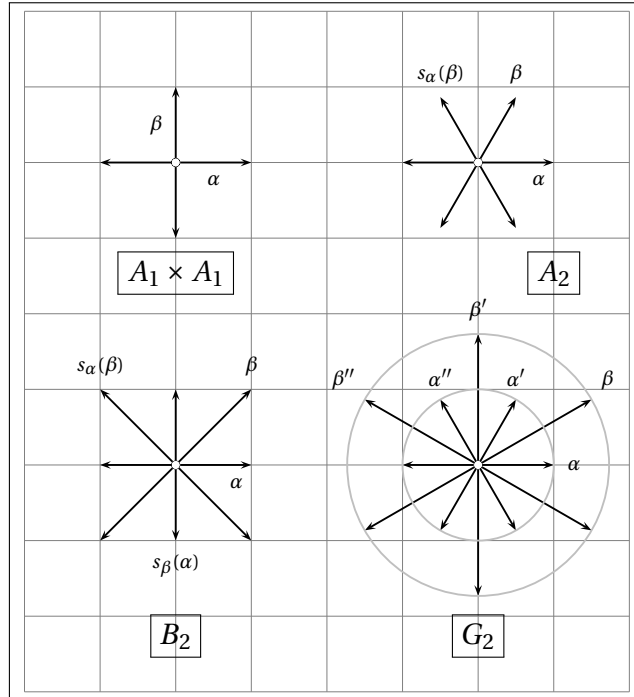
TAB. 1 – Valeurs possibles du rapport $\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$

$\theta_{\alpha,\beta}$	$4 \cos^2(\theta_{\alpha,\beta})$	$n_{\alpha,\beta}$	$n_{\beta,\alpha}$	$\frac{\ \beta\ }{\ \alpha\ }$
0	4	± 2	± 2	1
$\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$	3	± 3	± 1	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	2	± 2	± 1	$\sqrt{2}$
$\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	1	± 1	± 1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	non déterminé

TAB. 2 – Valeurs possibles de $n_{\alpha,\beta}$, $n_{\beta,\alpha}$, $\theta_{\alpha,\beta}$ et $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$

2. Dessiner les figures correspondant à quatre systèmes de racines dans \mathbb{R}^2 non deux à deux isomorphes (dans chacun des cas, l'une des racines devra être $(1,0)$). On les ordonnera dans l'ordre croissant du nombre de racines et on les appellera $A_1 \times A_1$, A_2 , B_2 et G_2 (ayant respectivement 4, 6, 8 et 12 racines).

Posons $\alpha = (0, 1)$. Avant de donner quelques explications sur les constructions des systèmes de racines, voici les dessins correspondants :



Comme le dit l'énoncé, $\alpha \in R \Rightarrow -\alpha \in R$ et $\alpha, \beta \in R \Rightarrow s_\alpha(\beta) \in R$. Cela nous simplifiera un peu le travail de recherche...

$A_1 \times A_1$: On considère $\theta_{\alpha, \beta} = \pi/2$. Tout vecteur β orthogonal à α vérifie les conditions requises pour que $\beta \in R$. Les deux autres vecteurs s'obtiennent en prenant les opposés de ceux-ci.

A_2 : On considère $\theta_{\alpha, \beta} = \pi/3$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha, \beta} = 1$ et $n_{\beta, \alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 1 \\ 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \langle \alpha, \beta \rangle = \|\alpha\|^2 \\ 2 \langle \alpha, \beta \rangle = \|\beta\|^2 \end{cases} \Rightarrow \|\beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \|\alpha\| = 1.$$

On peut alors construire le vecteur β , puis le vecteur $s_\alpha(\beta) = \beta - \alpha$, et les trois manquants sont donc $-\alpha, -\beta$ et $-s_\alpha(\beta)$.

B_2 : On considère $\theta_{\alpha, \beta} = \pi/4$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha, \beta} = 2$ et $n_{\beta, \alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \\ 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \langle \alpha, \beta \rangle = 2 \|\alpha\|^2 \\ 2 \langle \alpha, \beta \rangle = \|\beta\|^2 \end{cases} \Rightarrow \|\beta\|^2 = 2 \|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \sqrt{2} \|\alpha\| = \sqrt{2}.$$

On peut alors construire le vecteur β , puis les vecteurs $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\alpha$ et $s_\beta(\alpha) = \alpha - \beta$, et les quatre manquants sont alors $-\alpha, -\beta, -s_\alpha(\beta)$ et $-s_\beta(\alpha)$.

G₂ : On considère $\theta_{\alpha,\beta} = \pi/4$. On a alors (par exemple) $n_{\alpha,\beta} = 3$ et $n_{\beta,\alpha} = 1$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 3 \\ 2 \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \langle \alpha, \beta \rangle = 3 \|\alpha\|^2 \\ 2 \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\|\beta\|^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \|\beta\|^2 = 3 \|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\beta\| = \sqrt{3} \|\alpha\| = \sqrt{3}.$$

Ceci nous donne le vecteur β . On construit alors α', β' par rotation de α et β , d'angle $\pi/3$, ainsi que α'', β'' par rotation de α et β d'angle $2\pi/3$ (de sorte que chaque couple de vecteurs forme un angle multiple de $\pi/6$). Les six vecteur manquants s'obtiennent toujours en prenant les opposés de α et des cinq autres vecteurs construits à l'instant.

3. Soit α une racine de R de norme minimale. Supposons qu'il existe une racine β de R non proportionnelle et non orthogonale à α . Quitte à transformer R par une rotation, une homothétie ou une symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R} \times \{0\}$ (qui laisse invariants les coefficients de structure du système de racines), on peut supposer $\alpha = (1, 0)$ et β de deuxième coordonnée strictement positive.

(a) Montrer que $n_{\alpha,\beta} \neq 0$. En posant $\gamma = s_\alpha(\beta)$, montrer que $n_{\alpha,\gamma} = -n_{\alpha,\beta}$.

On suppose $\alpha = (1, 0)$. Puisque β est une racine de R non orthogonale à α , le produit scalaire de α et β n'est pas nul, impliquant directement que $n_{\alpha,\beta} \neq 0$. Posons alors $\gamma = s_\alpha(\beta)$, et montrons que $n_{\alpha,\gamma} = -n_{\alpha,\beta}$. On a

$$\begin{aligned} n_{\alpha,\gamma} &= 2 \frac{\langle \alpha, \gamma \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = 2 \frac{\langle \alpha, \beta - n_{\alpha,\beta} \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \frac{2 \langle \alpha, \beta \rangle - 2 n_{\alpha,\beta} \langle \alpha, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \\ &= 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} - 2 n_{\alpha,\beta} = n_{\alpha,\beta} - 2 n_{\alpha,\beta} = -n_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Dans la suite de cette question 3, on supposera $n_{\alpha,\beta} < 0$. De plus, puisqu'une symétrie, une homothétie ou une rotation laissent invariants les coefficients de structure du système de racines, on supposera aussi que $\alpha = (1, 0)$.

Quitte à remplacer α par $s_\alpha(\beta)$, on supposera $n_{\alpha,\beta} < 0$ et d'après le tableau des valeurs de $\theta_{\alpha,\beta}$, trois cas peuvent se présenter.

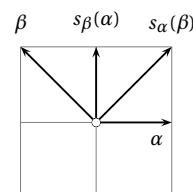
(b) cas 1 : Supposons que $\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{3\pi}{4}$. Calculer $s_\alpha(\beta)$ et $s_\beta(\alpha)$ et représenter graphiquement les quatre racines $\alpha, \beta, s_\alpha(\beta)$ et $s_\beta(\alpha)$. En déduire que $B_2 \subset R$. En supposant qu'il existe $\gamma \in R \setminus B_2$, montrer qu'alors l'angle entre γ et une racine de B_2 est inférieur à $\frac{\pi}{8}$. En conclure que $R = B_2$.

On a $\|\beta\| = \sqrt{2}$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -2$ et $n_{\beta,\alpha} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta} \alpha = 2\alpha + \beta \quad \text{et} \quad s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha} \beta = \alpha + \beta.$$

On retrouve au moins les huit vecteurs (les quatre non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha, -\beta, -s_\alpha(\beta)$ et $-s_\beta(\alpha)$) de B_2 , donc

$$B_2 \subset R.$$



Soit $\gamma \in R$. Supposons alors $\gamma \notin B_2$. On a déjà que

$$\theta_{\alpha,\gamma} \notin \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi \right\} \Rightarrow \theta_{\alpha,\gamma} \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\},$$

car sinon $\gamma \in B_2$. Séparons alors les différents cas :

- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{\pi}{3}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{2\pi}{3}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8}$;

Ceci contredit le fait que l'angle géométrique entre deux racines distinctes est d'au moins $\pi/6$ (partie I, 1.b). On en déduit que $\gamma \in B_2$, donc $R \subset B_2$, et puisqu'on a déjà démontré que $B_2 \subset R$, il vient que $R = B_2$.

(c) Supposons que $\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer

$$s_\alpha(\beta), \quad s_\beta(\alpha), \quad s_\beta \circ s_\alpha(\beta) \quad \text{et} \quad s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$$

et les représenter graphiquement ainsi que α et β . En déduire que $G_2 \in R$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $R = G_2$.

On a $\|\beta\| = \sqrt{3}$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -3$ et $n_{\beta,\alpha} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = 3\alpha + \beta \quad \text{et} \quad s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\beta = \alpha + \beta.$$

De même, après quelques calculs, et en utilisant les propriétés du produit scalaire, on détermine facilement que

$$s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) = 2\alpha + \beta \quad \text{et} \quad s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = 3\alpha + 2\beta.$$

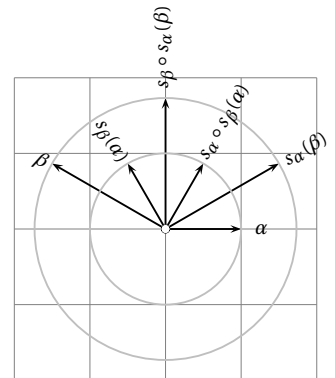
On retrouve au moins les douze vecteurs (les six non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha$, $-\beta$, $-s_\alpha(\beta)$, $-s_\beta(\alpha)$, $-s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$ et $-s_\beta \circ s_\alpha(\beta)$) de G_2 , donc

$$G_2 \subset R.$$

Soit $\gamma \in R$. Supposons alors que $\gamma \notin G_2$. On aurait alors automatiquement que

$$\min_{\alpha \in G_2} \theta_{\alpha,\gamma} < \frac{\pi}{6},$$

ce qui est impossible puisque l'angle géométrique entre deux racines distinctes de R est d'au moins $\pi/6$ (partie I, 1.b). On en déduit que $\gamma \in G_2$, donc $R \subset G_2$, et puisqu'on a déjà démontré que $G_2 \subset R$, il vient que $R = G_2$.



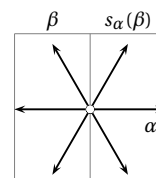
- (d) Supposons que $\|\beta\| = \|\alpha\|$ et $\theta_{\alpha,\beta} = \frac{2\pi}{3}$. Calculer $s_\alpha(\beta)$ et en déduire que $A_2 \subset R$.
 Supposons que $R \neq A_2$, soit $\gamma \in R \setminus A_2$. Montrer que l'angle entre γ et deux vecteurs adjacents de A_2 est égal à $\frac{\pi}{6}$. Quitte à réindexer les éléments de A_2 , montrer qu'on peut supposer $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$. En déduire que $R = G_2$.

On a $\|\beta\| = 1$. De plus, d'après le tableau, on sait que $n_{\alpha,\beta} = -1$. Par conséquent,

$$s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \alpha + \beta.$$

On retrouve au moins les six vecteurs (les deux non dessinés sont les opposés de ceux qui le sont, à savoir $-\alpha$, $-\beta$ et $-s_\alpha(\beta)$) de A_2 , donc

$$A_2 \subset R.$$



Supposons alors $R \neq A_2$, et supposons alors $\gamma \in R \setminus A_2$. On a déjà que

$$\theta_{\alpha,\gamma} \notin \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\} \Rightarrow \theta_{\alpha,\gamma} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\},$$

car sinon $\gamma \in A_2$. Séparons alors les différents cas :

- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,\alpha} = \theta_{\gamma,\beta} = \frac{\pi}{6}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{\pi}{4}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8} \rightarrow$ impossible ;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{\pi}{2}$: alors $\theta_{\gamma,\beta} = \theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \frac{\pi}{6}$;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{3\pi}{4}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{8} \rightarrow$ impossible ;
- ◇ $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$: alors $\theta_{\gamma,s_\alpha(\beta)} = \theta_{\gamma,-\alpha} = \frac{\pi}{6}$;

On en déduit que l'angle géométrique entre γ et deux vecteurs adjacents de A_2 est toujours égal à $\pi/6$. Puisqu'une rotation ne modifie pas les coefficients de structure du système de racines, on peut supposer que $\theta_{\alpha,\gamma} = \frac{5\pi}{6}$. D'après le tableau de la question 1.e (partie I), on sait que $\|\gamma\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$. Le cas précédent permet donc de conclure que $R = G_2$.

4. En conclure qu'à isomorphisme près, il n'y a que quatre systèmes de racines dans \mathbb{R}^2 .

2 Relations d'ordre dans \mathbb{R}^n

Une relation d'ordre \leq sur \mathbb{R}^n est dite compatible avec la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$.

La relation d'ordre strict associée est notée $<$.

1. Soit \leq une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel.

(a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \quad x \leq y \Rightarrow \lambda y \leq \lambda x.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Alors

$$\begin{aligned} x \leq y &\Leftrightarrow x - (x + y) \leq y - (x + y) \Leftrightarrow (-\lambda)(-y) \stackrel{-\lambda \in \mathbb{R}^+}{\leq} (-\lambda)(-x) \\ &\Leftrightarrow \lambda y \leq \lambda x. \end{aligned}$$

(b) Soit $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$ (le groupe linéaire de \mathbb{R}^n). On définit une relation par : pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $x \leq' y$ si $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Montrer que \leq' est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel.

Soient encore $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

réflexivité : $x \leq x$ car \leq est une relation d'ordre. Donc $\varphi(x) \leq \varphi(x)$. C'est exactement la définition de $x \leq' x$, donc \leq' est réflexive.

antisymétrie : Supposons que $x \leq' y$ et $y \leq' x$. Alors $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \leq \varphi(x)$. Puisque \leq est antisymétrique, il vient que $\varphi(x) = \varphi(y)$, d'où $x = y$ par injectivité de φ .

transitivité : Supposons que $x \leq' y$ et $y \leq' z$. Alors $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ et $\varphi(y) \leq \varphi(z)$. Puisque \leq est transitive, il vient que $\varphi(x) \leq \varphi(z)$, c'est-à-dire $x \leq' z$.

totalité : Puisque \leq est totale, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$. Puisque φ est linéaire, il vient que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ ou $\varphi(y) \leq \varphi(x)$, d'où le résultat : $x \leq' y$ ou $y \leq' x$.

compatible avec la structure d'espace vectoriel : On utilisera la linéarité de φ et la compatibilité de \leq avec la structure d'espace vectoriel :

◇ Montrons que $x \leq' y \Rightarrow x + z \leq' y + z$:

$$\begin{aligned} x \leq' y &\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x) + \varphi(z) \leq \varphi(y) + \varphi(z) \\ &\Rightarrow \varphi(x + z) \leq \varphi(y + z) \Rightarrow x + z \leq' y + z. \end{aligned}$$

◇ Montrons que $x \leq' y \Rightarrow \lambda x \leq' \lambda y$:

$$\begin{aligned} x \leq' y &\Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) \Rightarrow \lambda \varphi(x) \leq \lambda \varphi(y) \\ &\Rightarrow \varphi(\lambda x) \leq \varphi(\lambda y) \Rightarrow \lambda x \leq' \lambda y. \end{aligned}$$

2. On définit une relation \leq sur \mathbb{R}^n par : pour $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $x \leq y$ si

$$x = y \quad \text{ou} \quad [x \neq y \text{ et } x_k < y_k \text{ avec } k = \min \{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}].$$

- (a) En munissant le plan \mathcal{P} d'un repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, représenter graphiquement la partie

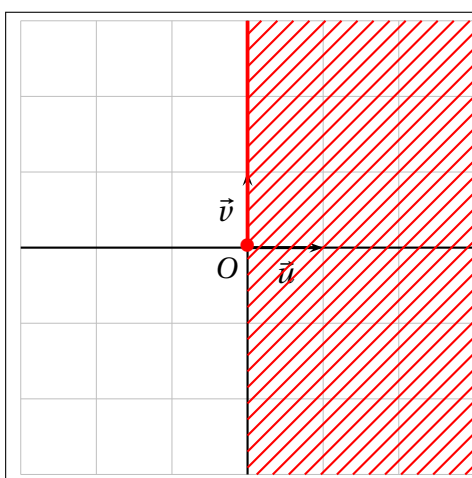
$$\{M(x, y) \in \mathcal{P} ; (0, 0) \leq (x, y)\}$$

en la hachurant d'une couleur particulière.

Remarquons que

$$\begin{aligned} & \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid (0, 0) \leq (x, y)\} \\ \Leftrightarrow & \left\{ M(x, y) \in \mathcal{P} \mid (x, y) = (0, 0) \text{ ou } \left((x, y) \neq (0, 0) \text{ et } ((0 < x \text{ ou } (x = 0 \text{ et } 0 < y)) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Cet ensemble correspond donc au demi-plan de frontière l'axe des ordonnées (dont seule la demi-droite (O, \vec{v}) est incluse). Représentons tout cela graphiquement (tout ce qui est rouge correspond donc à l'ensemble recherché) :



- (b) Montrer que la relation \leq est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel. Cet ordre est appelé l'ordre *lexicographique*.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$.

réflexivité : Puisque $x = x$, on a directement que $x \leq x$.

antisymétrie : Si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors :

- soit $x = y$ et $y = x$: le résultat est démontré!
- soit $x = y$ et $y \neq x$: impossible!
- soit $x \neq y$ et $y = x$: impossible!
- soit $x \neq y$ et $x_k < y_k$, $y_{k'} < x_{k'}$, avec $k = \min\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}$ et $k' = \min\{j \in \{1, \dots, n\}, y_j \neq x_j\}$. On remarque alors nécessairement que $k = k'$, donc $x_k < y_k$ et $y_k < x_k$, ce qui est impossible.

Le résultat est ainsi démontré.

transitivité : Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors :

- soit $x = y$ et $y = z$: on a donc $x = z$, c'est-à-dire $x \leq z$.
- soit $x = y$ et $y \leq z$: on a directement que $x \leq z$.
- soit $x \leq y$ et $y = z$: on a encore directement que $x \leq z$.

- soit $x_k < y_k$, $y_{k'} < z_{k'}$, avec $k = \min\{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \neq y_i\}$ et $k' = \min\{j \in \{1, \dots, n\}, y_j \neq z_j\}$.
On a encore trois cas à distinguer :
 - Si $k < k'$, alors $x_k < y_k = z_k$, donc $x_k < z_k$,
 - Si $k > k'$, alors $x_{k'} = y_{k'} < z_{k'}$, donc $x_{k'} < z_{k'}$,
 - Si $k = k'$, alors $x_k < y_k < z_k$, donc $x_k < z_k$.
 Dans les trois cas, on en déduit que \leq est transitive.

totalité : Montrons que $x \leq y$ ou $y \leq x$. On a que

$$x \leq y \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } (x \neq y \text{ et } x_k < y_k)).$$

Si cette condition n'est pas remplie (notons cela " $x \not\leq y$ "), alors on a

$$\begin{aligned} x \not\leq y &\Leftrightarrow x \neq y \text{ et } (x = y \text{ ou } x_k \geq y_k) \Leftrightarrow (x \neq y \text{ et } x = y) \text{ ou } (x \neq y \text{ et } x_k \geq y_k) \\ &\Leftrightarrow x \neq y \text{ et } x_k \geq y_k \Leftrightarrow x \neq y \text{ et } y_k < x_k^* \\ &\Leftrightarrow y \leq x. \end{aligned}$$

* : Le cas d'égalité $x_k = y_k$ amène une contradiction avec le fait que k est le plus petit entier tel que $x_k < y_k$, et n'est donc pas possible.

compatible avec la structure d'espace vectoriel :

- Montrons que $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$: Puisque $x \leq y$, on a soit $x = y$ ou alors, $x \neq y$ et $x_k < y_k$, avec $k = \min\{i \in \{0, \dots, n\}, x_i < y_i\}$.
 - Si $x = y$, alors $x + z = y + z$, d'où $x + z \leq y + z$.
 - Sinon, $\begin{cases} x \neq y \\ x_k < y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z \neq y + z \\ x_k + z_k < y_k + z_k \end{cases} \Rightarrow x + z \leq y + z$.
- Montrons que $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$: Avec les mêmes notations que précédemment,
 - Si $x = y$, alors $\lambda x = \lambda y$, d'où $\lambda x \leq \lambda y$.
 - Sinon, $\begin{cases} x \neq y \\ x_k < y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \neq \lambda y \\ \lambda x_k < \lambda y_k \end{cases} \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$.

3 Base d'un système de racines

On supposera n quelconque. Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n . Les résultats obtenus en I.1.e restent vrais, même si la dimension n'est plus 2. En particulier, pour deux racines $\alpha, \beta \in R$ distinctes, si $n_{\alpha, \beta} > 0$, l'un des deux coefficients $n_{\alpha, \beta}$ ou $n_{\beta, \alpha}$ est égal à 1.

On appelle *base du système de racines* R une partie B de R telle que

- la famille B est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n ;
- tout élément de R est combinaison linéaire d'éléments de B , à coefficients entiers, soit tous positifs ou nuls, soit tous négatifs ou nuls.

L'objet de cette partie est de mettre en évidence de telles bases.

1. On munit \mathbb{R}^n d'une relation d'ordre total \leq compatible avec la structure d'espace vectoriel. On note alors R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives, c'est-à-dire :

$$R^+ = \{\alpha \in R \mid \mathbf{0} < \alpha\} \quad \text{et} \quad R^- = \{\alpha \in R \mid \alpha < \mathbf{0}\}.$$

On appelle *racine simple* une racine positive qui n'est pas somme de deux racines positives et on note B l'ensemble des racines simples.

- (a) Montrer que tout élément de R^+ est soit dans B , soit somme de deux racines positives strictement plus petites.

Soit α un élément de R^+ . Dans ce cas, l'élément α se trouve soit dans B , soit dans $R^+ \setminus B$. Montrons que dans ce dernier cas, α est la somme de deux racines strictement plus petites que lui, que l'on note ici β et γ .

Mais supposons que l'une des deux racines (par exemple β) soit supérieure ou égale à α . Alors

$$\begin{cases} 0 < \alpha \leq \beta \\ 0 < \gamma < \alpha \end{cases} \Rightarrow \gamma < \alpha \leq \beta \Rightarrow \gamma + \gamma < \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma.$$

Mais alors

$$0 < \gamma \Rightarrow \alpha < \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta + \gamma \Rightarrow \alpha \neq \beta + \gamma.$$

On aboutit à une contradiction, donc $\beta < \alpha$. On montre de la même manière que $\gamma < \alpha$ en échangeant les rôles de $\beta + \gamma$. On en déduit que α est bien la somme de deux racines positives strictement plus petites que lui.

- (b) Montrer que tout élément de R^+ est combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls (*indication : on pourra ordonner les éléments de R^+ et faire une démonstration par récurrence ou raisonner par l'absurde*).

Supposons qu'il existe $\alpha \in R^+$ qui ne soit pas combinaison linéaire d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls. Mais d'après la question précédente, α est alors somme de deux racines positives strictement plus petites que lui, dont l'une au moins n'est pas dans B (sinon α serait dans B !). (★)

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que α est somme de n racines positives strictement plus petites que lui :

Initialisation : Paragraphe précédent.

Hérédité : Supposons que

$$\alpha = \alpha_{1,n} + \alpha_{2,n} + \cdots + \alpha_{n,n},$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_{i,n} \in R^+ \setminus B$, et est strictement plus petit que α .

D'après (★), l'un au moins de ces n facteurs n'est pas dans B , supposons (quitte à échanger deux indices) que ce soit $\alpha_{n,n}$. Alors $\alpha_{n,n}$ est somme de deux éléments (notés $\alpha_{n,n+1}$ et $\alpha_{n+1,n+1}$) de R^+ strictement inférieurs à lui (en particulier, $\alpha_{n+1,n+1} < \alpha_{n,n}$), donc strictement inférieurs à α (hypothèse de récurrence). Posons alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_{i,n+1} = \alpha_{i,n} (< \alpha) \quad \text{et} \quad \alpha_{n,n+1} + \alpha_{n+1,n+1} = \alpha_{n,n}.$$

Tous les $\alpha_{i,n+1}$ (pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$) sont strictement inférieurs à α , donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $(n+1)$.

On aboutit ainsi à une suite d'éléments de $R^+ \setminus B$ strictement décroissantes :

$$0 < \cdots < \alpha_{n+1,n+1} < \alpha_{n,n} < \cdots < \alpha_{2,2} < \alpha_{1,1}.$$

Elle possède donc un nombre infini de termes, ce qui contredit le fait que R^+ est un ensemble fini. Notre hypothèse de départ est donc fautive, et on peut donc en déduire que tout élément $\alpha \in R^+$ est combinaison linéaire de B à coefficients entiers positifs ou nuls.

2. Soient deux racines distinctes $\alpha, \beta \in R$.

(a) Montrer que si $n_{\alpha,\beta} > 0$, alors $\alpha - \beta \in R$.

Supposons que $n_{\alpha,\beta} > 0$. D'après l'introduction de la partie III, on a alors :

◇ soit $n_{\alpha,\beta} = 1$: dans ce cas, $s_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \beta - \alpha \in R \Rightarrow -(\beta - \alpha) \in R \Rightarrow \alpha - \beta \in R$;

◇ soit $n_{\beta,\alpha} = 1$: alors $s_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta,\alpha}\beta = \alpha - \beta \in R$.

(b) Supposons que $\alpha, \beta \in B$. Montrer que $\alpha - \beta \notin R$ et $n_{\alpha,\beta} \leq 0$.

Supposons que $\alpha - \beta \in R$. Alors $\alpha - \beta \neq 0$ (car $0 \notin R$) :

◇ soit $\alpha - \beta \in R^+$: alors il existe $\gamma \in R^+$ tel que $\gamma = \alpha - \beta$, donc

$$\alpha = \underbrace{\gamma}_{\in B \subset R^+} + \underbrace{\beta}_{\in R^+},$$

et α est somme de deux racines positives strictement inférieures à lui, ce qui contredit $\alpha \in B$ (d'après III.1.a).

◇ soit $\alpha - \beta \in R^-$: alors il existe $\delta \in R^+$ tel que $\delta = \beta - \alpha$, donc

$$\beta = \underbrace{\alpha}_{\in B \subset R^+} + \underbrace{\delta}_{\in R^+},$$

et comme précédemment, on aboutit à une contradiction.

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction prouvant ainsi que $\alpha - \beta \notin R$. La question III.2.a nous assure alors (par contraposée) que $n_{\alpha,\beta} \leq 0$.

3. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s \in B$ des racines simples deux à deux distinctes et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ des réels positifs tels que

$$\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r = \lambda_{r+1} \alpha_{r+1} + \cdots + \lambda_s \alpha_s.$$

Montrer que les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s$ sont tous nuls (indication : on pourra poser $v = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_r \alpha_r$ et montrer que $\langle v, v \rangle < 0$).

Posons $v = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r$ et $w = \lambda_{r+1} \alpha_{r+1} + \dots + \lambda_s \alpha_s$. Calculons alors $\langle v, w \rangle$ (en utilisant la linéarité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r, \lambda_{r+1} \alpha_{r+1} + \dots + \lambda_s \alpha_s \rangle \\ &= \sum_{j=r+1}^s \langle \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r, \lambda_j \alpha_j \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^s \langle \lambda_i \alpha_i, \lambda_j \alpha_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^s \lambda_i \lambda_j \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^s \lambda_i \lambda_j \frac{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}{2} \cdot 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^s \lambda_i \lambda_j \frac{\|\alpha\|^2}{2} n_{\alpha_i, \alpha_j}. \end{aligned}$$

Puisque $i \neq j$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ et la question précédente nous permet d'affirmer que $n_{\alpha_i, \alpha_j} \leq 0$, et puisque tous les coefficients λ_i et λ_j sont positifs ou nuls par hypothèse, on en déduit que

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^s \lambda_i \lambda_j \frac{\|\alpha\|^2}{2} n_{\alpha_i, \alpha_j} \leq 0.$$

Mais nous avons aussi $v = w$ par hypothèse, d'où (en remplaçant w par v)

$$\langle v, v \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \|v\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow v = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = 0 \quad (\nabla).$$

Supposons alors qu'au moins l'un des λ_i est strictement positif, par exemple λ_1 . Mais, pour tout $i \in \{2, \dots, r\}$,

$$\alpha_i \in B \Rightarrow 0 < \alpha_i \Rightarrow 0 \leq \lambda_i \alpha_i \Rightarrow 0 \leq \sum_{i=2}^r \lambda_i \alpha_i \stackrel{0 < \lambda_1 \alpha_1}{\implies} 0 < \sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i.$$

Nous aboutissons à une contradiction avec (∇) , nous prouvant que l'égalité $\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_r \alpha_r = 0$ n'est possible que lorsque $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Bien sûr, on a aussi $w = v$, donc le même raisonnement permet de conclure que $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_s = 0$, d'où le résultat.

4. Montrer que B est une base de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . (On dit que B est une base du système de racines R , associée à l'ordre sur \mathbb{R}^n .)

Puisque $B \subset R^+$, tout élément de B s'écrit comme combinaison linéaire (d'après III.1.b) d'éléments de B à coefficients entiers positifs ou nuls : B est une famille liée. De plus, le résultat précédent nous permet d'affirmer que B est une famille libre, donc que B est une base de \mathbb{R}^n .

5. En munissant \mathbb{R}^2 de l'ordre lexicographique, pour chacun des quatre systèmes de racines, dessiner d'une couleur particulière les vecteurs de la base associée.

Rappelons que $B = \{\alpha < 0 \mid \alpha \text{ n'est pas somme de deux racines positives}\}$. Il faut alors distinguer quatre cas. Pour chacun d'entre eux, nous allons d'abord nous aider de la question II.2.a pour éliminer les vecteurs de R n'étant pas positifs (ils seront dessinés en gris). Nous obtiendront ainsi les éléments de R^+ . Puisqu'on est dans \mathbb{R}^2 , la base que l'on recherche doit comporter deux vecteurs, nous chercherons donc quels sont les vecteurs qui s'écrivent sous forme de somme de deux autres, que nous éliminerons. Il restera les deux vecteurs rouges, constituant notre base.

Notons encore que $\{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid (0, 0) \leq (x, y)\} = \{\overrightarrow{OM}(x, y) \mid (0, 0) \leq (x, y)\}$. Concrètement,

$A_1 \times A_1$: $R = \{\alpha, \beta, -\alpha, -\beta\}$. On constate alors que ni $-\alpha$, ni $-\beta$ ne sont dans R^+ (en effet, l' "extrémité" de chacun de ces vecteurs n'est pas dans l'ensemble déterminé à la question II.2.a), donc

$$B = \{\alpha, \beta\}.$$

A_2 : On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), -\beta\}$. De plus, on constate que $-\beta - (s_\alpha(\beta)) = \alpha$, donc $\alpha \notin B$, et

$$B = \{s_\alpha(\beta), -\beta\}.$$

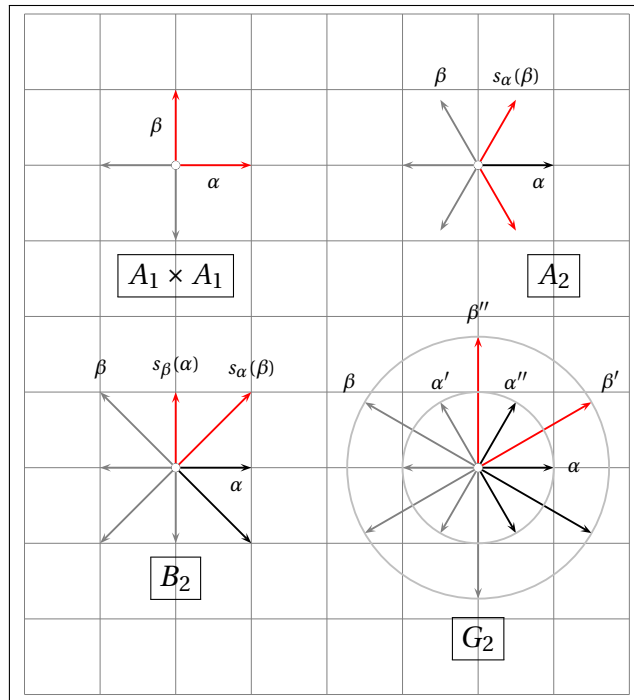
B_2 : On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), s_\beta(\alpha), -\beta\}$. De plus, on constate que $s_\alpha(\beta) - s_\beta(\alpha) = \alpha$ et $\alpha - s_\beta(\alpha) = -\beta$, donc $\alpha, -\beta \notin B$, et

$$B = \{s_\alpha(\beta), s_\beta(\alpha)\}.$$

G_2 : On détermine que $R^+ = \{\alpha, s_\alpha(\beta), -\beta, -s_\beta(\alpha), s_\alpha \circ s_\beta(\alpha), s_\beta \circ s_\alpha(\beta)\}$. De plus, on constate que $s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) - s_\beta(\alpha) = \alpha$, $s_\alpha(\beta) - s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = -\beta$, $s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) - s_\beta \circ s_\alpha(\beta) = -s_\beta(\alpha)$ et $\alpha + s_\alpha \circ s_\beta(\alpha) = s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$, d'où

$$B = \{s_\alpha(\beta), s_\beta \circ s_\alpha(\beta)\}.$$

Voici les figures associées à ces calculs (pour G_2 , on note $\alpha' = s_\beta(\alpha)$, $\beta' = s_\alpha(\beta)$, $\alpha'' = s_\alpha \circ s_\beta(\alpha)$ et $\beta'' = s_\beta \circ s_\alpha(\beta)$) :



4 Groupe de Weyl d'un système de racines

Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n , \leq une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^n compatible avec la structure d'espace vectoriel, R^+ l'ensemble des racines positives et B la base de R associée

à la relation d'ordre. On appelle groupe de Weyl de R , noté W , le sous-groupe des automorphismes de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , engendré par les symétries s_α ($\alpha \in R$).

1. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$ (le groupe orthogonal de \mathbb{R}^n). Établir que

$$s_{\varphi(a)} = \varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1}.$$

Rappelons tout d'abord que si $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$, alors on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\text{b}) \quad \text{et} \quad \|\varphi(x)\| = \|x\| \quad (\#).$$

De plus, puisque $O(\mathbb{R}^n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$, une telle application est linéaire (†).

Il vient alors que pour tout $b \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ s_a \circ \varphi^{-1})(b) &= \varphi\left(s_a(\varphi^{-1}(b))\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}(b) - 2\frac{\langle a, \varphi^{-1}(b) \rangle}{\langle a, a \rangle} a\right) \\ &\stackrel{(\text{b})}{=} \varphi\left(\varphi^{-1}(b) - 2\frac{\langle \varphi(a), b \rangle}{\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle} a\right) \stackrel{(\text{†})}{=} b - 2\frac{\langle \varphi(a), b \rangle}{\langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle} \varphi(a). \end{aligned}$$

2. Montrer que le groupe de Weyl W est un groupe fini.
3. (a) Soit $\alpha \in R^+ \setminus B$. Montrer qu'il existe $\beta \in B$ tel que $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$ (indication : on pourra utiliser III.1.b et développer $\langle \alpha, \alpha \rangle$). En déduire que $n_{\beta, \alpha} > 0$ et que $\alpha - \beta \in R^+$.
- (b) Soit $\alpha \in R^+$ et $\beta \in B$ tels que $\alpha \neq \beta$. Montrer que $s_\beta(\alpha) \in R^+$.
4. On note W_B le sous-groupe de W engendré par les applications $(s_\alpha)_{\alpha \in B}$ et on pose

$$S = \{w(\alpha) \mid w \in W_B \text{ et } \alpha \in B\}.$$

- (a) Montrer que $R^+ \subset S$ (indication : on pourra raisonner par l'absurde).
- (b) En déduire que $R = S$ (indication : on pourra remarquer que $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ pour $\alpha \in B$).
- (c) Conclure que $W = W_B$.

5 Groupe diédraux

1. Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p} , le groupe des isométries invariant un polygone régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, M_1, \dots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On posera $M_p = M_0$.

(a) Montrer que le sous-groupe C_p de D_{2p} constitué des isométries directes, est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $2\pi/p$ où O est le centre du polygone \mathcal{P}_p .

(b) Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygone \mathcal{P}_p invariant.

(c) Montrer que

$$D_{2p} = \{\rho^i \circ \sigma^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

(d) Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.

2. Soit G un groupe fini engendré par deux éléments distincts s et s' d'ordre 2. On pose $r = ss'$ et on note p l'ordre de r . On note e l'élément neutre de G .

(a) Montrer que G est engendré par r et s .

(b) Établir que $sr = r^{-1}s$, puis que $sr^k = r^{p-k}s$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que

$$G = \{r^i s^j \mid i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\}.$$

(c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s \neq r^k$ (indication : on pourra raisonner par l'absurde et montrer que G serait commutatif, puis que $G = \{e, r\}$). En déduire que G est d'ordre $2p$.

(d) Montrer que G est isomorphe à D_{2p} .

(e) Déterminer les groupe de Weyl associés aux systèmes de racines de \mathbb{R}^2 .

6 Chambre de Weyl

Soit R un système de racines de \mathbb{R}^n et W le groupe de Weyl associé. Pour tout $\alpha \in R$, on note P_α l'hyperplan orthogonal à α .

1. Montrer que $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ est une partie ouverte de \mathbb{R}^n .

La partie Ω est réunion finie disjointe de parties non vides ouvertes connexes de \mathbb{R}^n , ce sont les *chambres de Weyl* du système de racines R .

2. Soit C une partie connexe non vide de \mathbb{R}^n inclus dans Ω . Montrer qu'il existe une chambre de Weyl de R contenant C .

3. Montrer que le groupe de Weyl W permute les hyperplans P_α ($\alpha \in R$), ainsi que les chambres de Weyl.

4. Soient C_1 et C_2 deux chambres de Weyl de R et soit $x_1 \in C_1$ et $x_2 \in C_2$.

(a) Justifier l'existence d'un élément $w \in W$ tel que

$$\|x_1 - w(x_2)\| = \inf\{\|x_1 - w'(x_2)\| \mid w' \in W\}.$$

(b) On pose $I = \{tx_1 + (1-t)w(x_2) \mid t \in [0,1]\}$. Montrer que $I \subset C_1$ (indication : on pourra supposer qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap P_\alpha \neq \emptyset$ et montrer qu'il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $\langle t_0x_1 + (1-t_0)w(x_2), \alpha \rangle = 0$ et que $\|x_1 - s_\alpha \circ w(x_2)\|^2 < \|x_1 - w(x_2)\|^2$).

(c) En déduire que $w(C_2) = C_1$. On dit que le groupe W opère transitivement sur les chambres de Weyl de R .

5. Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R et soit $(\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ la base duale de B pour le produit scalaire de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n vérifiant

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \langle \beta_i, \beta'_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} C(B) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \beta_1 \rangle > 0, \dots, \langle x, \beta_n \rangle > 0\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \beta'_i \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \right\}, \end{aligned}$$

égalité que l'on ne demande pas de démontrer.

(a) Montrer que $C(B) \subset \Omega$ et qu'il existe une chambre de Weyl C telle que $C(B) \subset C$.

(b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé. On pose

$$C_i^+ = \{x \in C \mid \langle x, \beta_i \rangle > 0\} \quad \text{et} \quad C_i^- = \{x \in C \mid \langle x, \beta_i \rangle < 0\}.$$

Montrer que C_i^+ et C_i^- sont des parties ouvertes telles que $C_i^+ \cup C_i^- = C$ et $C_i^+ \cap C_i^- = \emptyset$. En déduire que $C = C_i^+$.

(c) En déduire que $C(B) = C$. On dit que $C(B)$ est la *chambre de Weyl fondamentale* relativement à B .

6. Pour chacun des quatre systèmes de racines de \mathbb{R}^2 , hachurer d'une couleur particulière la chambre de Weyl fondamentale relativement à la base associée à l'ordre lexicographique de \mathbb{R}^2 .

7. (a) Montrer que pour toute chambre de Weyl C de R , il existe une base B de R telle que $C = C(B)$.

(b) Montrer que l'application qui à une base B de R associe la chambre $C(B)$ est une bijection de l'ensemble des bases de R sur l'ensemble des chambres de R .

8. Soit B une base de R , R^+ l'ensemble des racines positives et R^- l'ensemble des racines négatives.

- (a) Soient β_1, \dots, β_p ($p \in \mathbb{N}^*$) des éléments non nécessairement distincts de B tels que

$$s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}(\beta_p) \in \mathbb{R}^-.$$

Montrer qu'il existe $q \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que

$$s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_p} = s_{\beta_1} \circ \dots \circ s_{\beta_{q-1}} \circ s_{\beta_{q+1}} \circ \dots \circ s_{\beta_{p-1}}.$$

- (b) En déduire que si $w \in W$ et $w \neq \text{Id}$, alors il existe $\beta \in B$ tel que $w(\beta) \in \mathbb{R}^-$.
9. (a) Montrer que le groupe de Weyl W de R opère simplement transitivement sur l'ensemble des bases de R , c'est-à-dire que pour deux bases B et B' données de R , il existe un unique élément $w \in W$ tel que $w(B) = B'$.
- (b) En déduire que le groupe de Weyl W de R opère simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de Weyl de R .