CAPES interne 2008 de Mathématiques
CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une
préparation à la philosophie – *Isocrate*

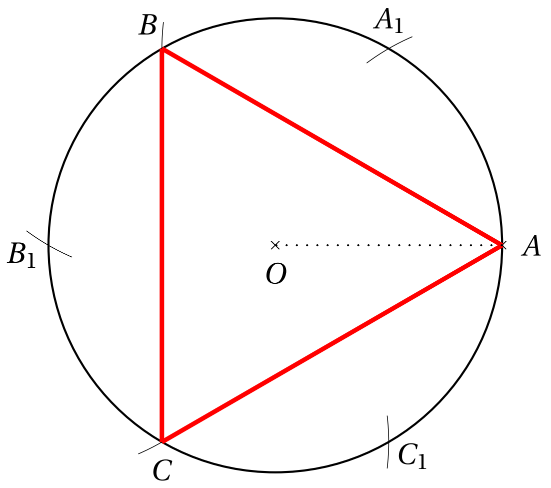
Problème 1

Ce problème a pour objet une approche du paradoxe de Bertrand.

Notations : Dans le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $\mathscr{C}$ désigne le cercle de centre O et de rayon R, R étant un réel strictement positif donné.

Partie I : Étude des propriétés des triangles équilatéraux inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$

I.1 Soit A un point donné du cercle $\mathscr{C}$. Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$. Préciser les étapes successives de la construction.



On place un point O, on trace le cercle $\mathscr{C}$ de rayon choisi $R > 0$. On place ensuite un point A sur ce cercle, puis sans refermer le compas, on reporte autant de fois que nécessaire la longueur OA sur le cercle afin de revenir au point A. On nomme les points respectivement A_1, B, B_1, C et C_1.

Pourquoi cela marche ?
Les égalités $OA = AA_1$ et $OA = OA_1$ impliquent que le triangle OAA_1 est équilatéral, donc $\widehat{AOA_1} = \pi/3$ (on raisonne en angles géométriques). On montre de la même manière que $\widehat{A_1OB} = \widehat{BOB_1} = \widehat{B_1OC} = \widehat{COC_1} = \pi/3$. Puisque la somme des angles autour du point O est égale à 2π, il vient que $\widehat{C_1OA} = \pi/3$. Sachant que $OC_1 = OA$, on en déduit que le triangle AOC_1 est aussi équilatéral.

$AA_1BB_1CC_1$ est donc un hexagone régulier. On montre alors aisément que les triangles AA_1B, BB_1C et CC_1A sont isométriques, impliquant $AB = AC = CA$, et le triangle ABC est lui aussi équilatéral.

Dans toute la suite du problème, A, B, C désignent trois points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle ABC soit équilatéral. On note A' le milieu du segment $[BC]$ et A'' le point diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathscr{C}$.

I.2 On se propose de déterminer la longueur L des côtés du triangle ABC.

I.2.1 Déterminer le quotient de longueurs AO/AA'.

D'après la question précédente, $OB = BB_1 = B_1C = CO$, donc OBB_1C est un losange. Or, dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu A', de sorte que A' est le milieu de $[OB_1]$.

Par suite,

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{AO}{AO+OA'} = \frac{R}{R+\frac{R}{2}} = \frac{R}{\frac{3}{2}R} = 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

I.2.2 **En déduire la longueur AA' en fonction de R.**

Par le produit en croix, l'égalité précédente est équivalente à

$$2AA' = 3AO \quad \Leftrightarrow \quad 2AA' = 3R \quad \Leftrightarrow \quad AA' = \frac{3}{2}R.$$

I.2.3 **Démontrer que $L = R\sqrt{3}$.**

Puisque L désigne la longueur des côtés du triangle équilatéral ABC, on a $A'C = L/2$. En effet, on a déjà vu que les diagonales du losange OBB_1C se coupent en leur milieu A'. De plus, les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, donc les droites $(B_1O) = (AA')$ et $(BC) = (A'B)$ sont perpendiculaires, impliquant que le triangle $AA'B$ est rectangle en A'.

On peut ainsi appliquer le théorème de Pythagore afin de déterminer que :

$$\begin{aligned} & AB^2 = AA'^2 + A'B^2 \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & L^2 - \frac{1}{4}L^2 = \frac{9}{4}R^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3L^2 = 9R^2 \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = 3R^2 \\ \Leftrightarrow \quad & L = R\sqrt{3} \text{ ou } L = -R\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Puisque qu'une longueur est positive, on en conclut que $L = R\sqrt{3}$.

I.3 **Soit U un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct de A. On choisit V et W deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que le triangle UVW soit un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.**

I.3.1 **Démontrer que les triangles ABC et UVW sont isométriques.**

La construction de la question I.1 nous assure que UVW est un triangle équilatéral qui a les mêmes longueurs que le triangle équilatéral ABC. Or, si deux triangles ont les mêmes longueurs respectives de côtés, alors ils sont isométriques, prouvant que les triangles UVW et ABC sont isométriques.

I.3.2 **Préciser une isométrie du plan transformant le triangle ABC en le triangle UVW en distinguant les cas de triangles directement ou non directement isométriques.**

Distinguons les deux cas de l'énoncé :

UVW est directement isométrique à ABC : Les angles orientés $\widehat{ABC}$ et $\widehat{UVW}$ sont donc les mêmes. On obtient ainsi le triangle UVW à partir du triangle ABC par la rotation r de centre O et d'angle orienté $\widehat{AOU}$.

UVW est indirectement isométrique à ABC : Ceci signifie que les angles orientés $\widehat{ABC}$ et $\widehat{UVW}$ sont opposés. Par conséquent, les triangles ABC et UWV sont directement isométriques, et le cas précédent nous assure que la rotation r transforme le triangle ABC en le triangle UWV. De plus, la symétrie ayant pour axe la médiatrice de $[VW]$ (que l'on note s) transforme le triangle UWV en le triangle UVW.

Au final, la transformation $s \circ r$ transforme bien le triangle ABC en le triangle UVW.

I.4 **Justifier les quatre caractérisations de la droite (AA') comme droite remarquable du triangle ABC.**

- Nous avons déjà vu précédemment que les droites (AA') et (BC) sont perpendiculaires et que A' est le milieu de $[BC]$. Par conséquent et par définition, (AA') *est la médiatrice du segment* $[BC]$ *dans le triangle* ABC.
- (AA') passant par le point A du triangle ABC et étant perpendiculaire au côté opposé $[BC]$ est, par définition, *la hauteur issue de* A *dans le triangle* ABC.
- Puisque (AA') passe par le point A du triangle ABC et passe par le milieu A' du côté opposé $[BC]$, il vient par définition que (AA') *est aussi la médiane issue de* A *dans le triangle* ABC.
- Enfin, par symétrie d'axe la médiatrice (AA') de $[BC]$ et par propriété de la médiatrice, le triangle $AA'B$ est transformé en le triangle $AA'C$ qui sont par conséquent isométriques. Cela entraîne alors l'égalité d'angles géométriques $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AC}$. Par définition, la droite (AA') *est alors la bissectrice issue de* A *dans le triangle* ABC.

I.5 **Déterminer la longueur de chacun des arcs du cercle $\mathscr{C}$ de part de d'autre de la droite (BC).**

Puisque ABC est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$, les arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ et $\widehat{CA}$ (on entend le plus court des deux arcs possibles pour chaque cas) ont la même longueur. Ils représentent donc chacun un tiers de la longueur du cercle, qui vaut $2\pi R$. Il s'ensuit que

$$\text{le petit arc } \widehat{BC} \text{ mesure } \frac{2\pi R}{3}, \qquad \text{le grand arc } \widehat{BC} \text{ mesure } \frac{4\pi R}{3}.$$

Partie II : Quelques comparaisons de longueurs de segments

Dans cette partie, les points A, B et C sont fixés sur le cercle $\mathscr{C}$.

II.1 **Soit P un point du cercle $\mathscr{C}$, distinct du point A. On note I le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP) et J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB).**

II.1.1 **Démontrer que si le point P appartient à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas le point A, alors $IA \geqslant JA$.**

Si le point P se trouve sur l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas le point A, on peut supposer par symétrie que P se trouve entre les points A'' et C sur le cercle $\mathscr{C}$. Il vient alors l'inégalité

$$A''P \leqslant A''C = A''B.$$

L'égalité s'explique par le fait que $(AA') = (AA'')$ est la médiatrice de $[BC]$ (question I.4).

Remarquons que les triangles $AA''B$ et $AA''P$ sont tous les deux inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AA'']$ (donc un côté de chacun des deux triangles). Par théorème du cours, ces deux triangles sont alors rectangle respectivement en B et P. Par définition des points I et J, on en déduit que les droites (OJ) et $(A''B)$ sont parallèles, ainsi que les droites (OI) et $(A''P)$. Puisque O est le milieu du côté commun $[AA'']$ à ces deux triangles, on peut y appliquer le théorème des milieux qui nous donne les égalités $A''B = 2OJ$ et $A''P = 2OI$. L'inégalité ci-dessus devient alors :

$$2OI \leqslant 2OJ \qquad \Leftrightarrow \qquad OI \leqslant OJ.$$

De plus, les triangles AOJ et AOI sont rectangles respectivement en J et en I (par définition de ces deux points). En appliquant le théorème de Pythagore dans ces deux triangles d'hypoténuse commune $[AO]$ et en utilisant l'inégalité qui précède, on trouve

$$\begin{aligned} & AO^2 = AJ^2 + OJ^2 = AI^2 + OI^2 \leqslant AI^2 + OJ^2 \\ \Leftrightarrow \quad & AJ^2 + OJ^2 \leqslant AI^2 + OJ^2 \quad \Leftrightarrow \quad AJ^2 \leqslant AI^2. \end{aligned}$$

Puisque AI et AJ sont des longueurs, on en déduit que $AI \geqslant AJ$, qui est le résultat recherché.

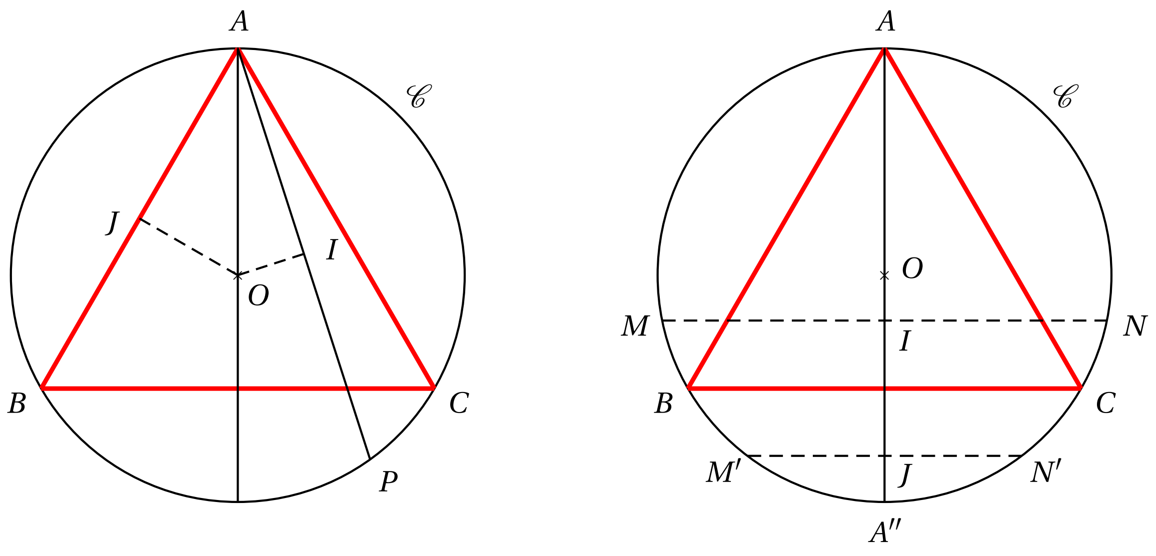
II.1.2 **En déduire que, si le point P appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant pas le point A, alors $AP \geqslant L$.**

Le théorème des milieux dans le triangle $AA''P$ nous assure que $AP = 2AI$. De même, $L = AB = 2AJ$. L'inégalité de la question précédente entraîne alors

$$AI \geqslant AJ \quad \Leftrightarrow \quad 2AI \geqslant 2AJ \quad \Leftrightarrow \quad AP \geqslant L.$$

II.1.3 **Montrer que si le point P appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ contenant le point A, alors $AP \leqslant L$.**

Une démonstration analogue à celle effectuée dans les deux dernières questions amènerait le résultat demandé.



II.2 **Soient M et N deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tels que la droite (MN) soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point I du segment $[OA']$. Soient M' et N' deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tels que la droite $(M'N')$ soit perpendiculaire à la droite (AA'') au point J du segment $[A'A'']$.**
Démontrer que $M'N' \leqslant BC \leqslant MN$.

Par définition du point M, le triangle MOI est rectangle en I, donc en appliquant le théorème de Pythagore,

$$R^2 = OM^2 = MI^2 + OI^2.$$

On a déjà vu que les droites (BC) et (AA') étaient perpendiculaires. En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle BOA' rectangle en A', on trouve

$$R^2 = OB^2 = BA'^2 + OA'^2.$$

Les deux dernières égalités nous permettent d'écrire que $MI^2 + OI^2 = BA'^2 + OA'^2$. Mais $I \in [OA']$ implique que $OI \leqslant OA'$, donc que $OI^2 \leqslant OA'^2$, et l'égalité précédente implique alors

$$MI^2 + OI^2 = BA'^2 + OA'^2 \geqslant BA'^2 + OI^2 \quad \Rightarrow \quad MI^2 \geqslant BA'^2.$$

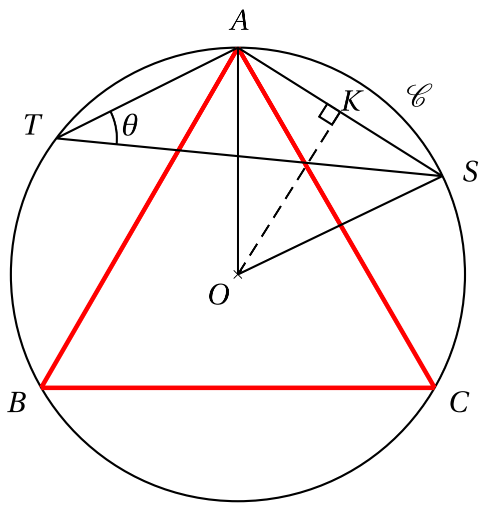
Puisque MI et BA' sont des longueurs, donc des quantités positives, il vient que $MI \geqslant BA'$. Par symétrie d'axe (AA'), on détermine que $NI \geqslant CA'$. Par addition membre à membre des ces deux dernières inégalités, on trouve finalement que

$$MN \geqslant BC.$$

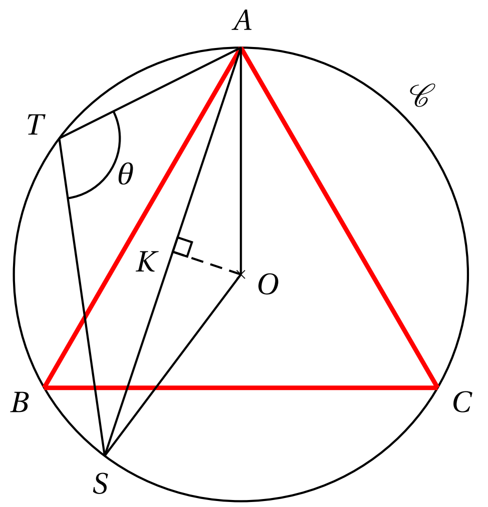
Un raisonnement analogue permet de montrer qu'on a aussi l'inégalité $BC \geqslant M'N'$, d'où la double-inégalité

$$M'N' \leqslant BC \leqslant MN.$$

Cas où $0 < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$:



Cas où $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi$:



II.3 **Soient S et T deux points distincts du cercle $\mathscr{C}$ tous deux distincts du point A. On note θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{ATS}$; on a donc $0 < \theta < \pi$. On note K le milieu du segment $[AS]$.**

II.3.1 **Calculer les longueurs AK et AS en fonction de R et θ en distinguant les trois cas suivants : $\theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta > \dfrac{\pi}{2}$.**

Distinguons les cas proposés par l'énoncé :

Supposons que $\theta < \pi/2$: A, S, T sont trois points du cercle $\mathscr{C}$ de centre O. D'après le théorème de l'angle au centre, puisque les points T et O interceptent le même arc $\overset{\frown}{AS}$, on a que

$$\widehat{AOS} = 2\widehat{ATS} = 2\theta.$$

Or AOS est un triangle isocèle en O (car $OA = OS = R$), donc par propriété du cours, la médiatrice (OK) du côté $[AS]$ est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{AOS}$, ce qui implique que $\widehat{AOK} = \widehat{AOS}/2 = \theta$. De plus, la somme des angles d'un triangle quelconque étant égale à π, on a en particulier dans le triangle AOK :

$$\widehat{OAK} = \pi - \widehat{OKA} - \widehat{AOK} = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (>0).$$

On applique alors les relations de trigonométrie dans le triangle AOK rectangle en K :

$$\cos\widehat{OAK} = \frac{AK}{OA} \quad \Leftrightarrow \quad AK = OA\cos\widehat{OAK} = R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = R\sin\theta.$$

Enfin, puisque K est le milieu de $[AS]$, on a $AS = 2AK = 2R\sin\theta$.

Supposons que $\boldsymbol{\theta = \pi/2}$: Dans ce cas, le triangle ATS est rectangle en T. Par propriété du cours, on a que l'hypoténuse $[AS]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$ (ce qui entraîne que $S = A''$ et donc $K = O$) et $OA = OT = OS = R$. Il vient donc directement que

$$AK = AO = R = R\sin\theta \quad \text{et} \quad AS = 2AK = 2R\sin\theta.$$

Supposons que $\boldsymbol{\theta > \pi/2}$: A, S, T sont trois points du cercle $\mathscr{C}$ de centre O. D'après le théorème de l'angle au centre, puisque les points T et O interceptent les deux arcs $\overset{\frown}{AS}$, on a que

$$\widehat{AOS} = 2\widehat{ATS} = 2(\pi - \theta).$$

On montre comme précédemment que $\widehat{AOK} = \widehat{AOS}/2 = \pi - \theta$, puis que :

$$\widehat{OAK} = \pi - \widehat{OKA} - \widehat{AOK} = \pi - \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta) = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (>0).$$

On applique alors les relations de trigonométrie dans le triangle AOK rectangle en K :

$$\cos\widehat{OAK} = \frac{AK}{OA} \quad \Leftrightarrow \quad AK = OA\cos\widehat{OAK} = R\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = R\sin\theta.$$

Enfin, puisque K est le milieu de $[AS]$, on a $AS = 2AK = 2R\sin\theta$.

Dans les trois cas, on trouve finalement le même résultat, à savoir

$$AK = R\sin\theta \quad \text{et} \quad AS = 2R\sin\theta.$$

II.3.2 Démontrer que si $\boldsymbol{\theta < \pi/3}$, alors $\boldsymbol{AS < L}$.

Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0, \pi/3]$, on a

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin 0 < \sin\theta < \sin\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2R\sin\theta < 2R\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < AS < R\sqrt{3} \quad \overset{\text{I.2.3}}{\Leftrightarrow} \quad 0 < AS < L.$$

II.3.3 **Comparer les longueurs AS et L lorsque $\theta > 2\pi/3$.**

Par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[2\pi/3, \pi]$, on a

$$\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{2\pi}{3} > \sin\theta > \sin\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2R\frac{\sqrt{3}}{2} > 2R\sin\theta > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad R\sqrt{3} > AS > 0 \quad \overset{\text{I.2.3}}{\Leftrightarrow} \quad 0 < AS < L.$$

On arrive au même résultat qu'à la question précédente.

II.4 **Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ distinct des points A et A". On note ρ le nombre réel égal à la longueur AD. On appelle Γ le cercle de centre D et de rayon ρ.**

II.4.1 **Démontrer que le cercle Γ coupe de cercle $\mathscr{C}$ en deux points distincts, le point A et un autre point noté F.**

Puisque $D \neq A''$, il existe un point $F \neq A$ sur le cercle $\mathscr{C}$ tel que $DF = DA$. En effet, il suffit de reporter le petit arc $\widehat{AD}$ de l'autre côté du point D afin de déterminer F. Puisque $DA = DF$, les points A et F se trouvent tous les deux sur le cercle de centre D et de rayon $\rho = AD$, cercle noté Γ.

II.4.2 **Démontrer que la droite (OD) est la médiatrice du segment $[AF]$. On note G le milieu du segment $[AF]$.**

Puisque les points A et F sont sur Γ, il vient que $DF = DA$. Autrement dit, le point D est équidistant des points A et F. De même, puisque les points A et F se trouvent aussi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a que $OA = OF$. Autrement dit, le point O est aussi équidistant des points A et F.

On rappelle que tout point équidistant des extrémités d'un segment se trouve sur la médiatrice de ce segment. Par conséquent, les points O et D se trouvent sur la médiatrice du segment $[AF]$. Puisque deux points suffisent à définir une droite, il vient que la droite (OD) est la médiatrice du segment $[AF]$.

II.4.3 **Soit D' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à D. Calculer l'aire du triangle ADD' en fonction de R et de ρ.**

Puisque le triangle ADD' est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ dont un diamètre est le côté $[DD']$ de ce triangle, il vient par théorème du cours que ce triangle est rectangle en A. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle, il vient que

$$D'A^2 = D'D^2 - DA^2 = (2R)^2 - \rho^2 = 4R^2 - \rho^2 \quad \overset{D'A>0}{\Leftrightarrow} \quad D'A = \sqrt{4R^2 - \rho^2}.$$

L'aire du triangle rectangle ADD', notée $\mathscr{A}_{ADD'}$, est donné par le demi-produit de la hauteur par la base. On en conclut que

$$\mathscr{A}_{ADD'} = \frac{AD \cdot AD'}{2} = \frac{\rho\sqrt{4R^2 - \rho^2}}{2}.$$

II.4.4 **En déduire la longueur AF en fonction de R et de ρ.**

Les droites (AF) et $(OD) = (DD')$ étant perpendiculaires (question II.4.2), le segment $[AG]$ est aussi une hauteur du triangle ADD'. La base associée est le segment $[DD']$. Par suite,

$$\mathscr{A}_{ADD'} = \frac{AG \cdot DD'}{2} = \frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad AG = \frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{DD'} = \frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{2R}.$$

G étant le milieu de $[AF]$, il vient alors

$$AF = 2AG = 2\,\frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{2R} = \frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{R}.$$

II.4.5 **Résoudre l'inéquation suivante :**

$$\boldsymbol{x\sqrt{4R^2-x^2} \geqslant R^2\sqrt{3},}$$

pour x nombre réel de l'intervalle $]0,2R[$.

Définissons, pour tout $x \in\,]0,2R[$, la fonction f par $f(x) = x\sqrt{4R^2-x^2}$. f est dérivable sur cet intervalle, et pour tout x de cet intervalle, on a :

$$f'(x) = \sqrt{4R^2-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}} = \frac{4R^2-x^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} = \frac{2(2R^2-x^2)}{\sqrt{(2R)^2-x^2}}.$$

Soit alors x dans l'intervalle $]0,2R[$. Puisque $x < 2R$, on a $\sqrt{(2R)^2-x^2} > 0$ et de plus, $2 > 0$, donc $f(x)$ est du signe de $2R^2-x^2$. Or

- $2R^2-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 2R^2 \Leftrightarrow x < R\sqrt{2}$,
- $2R^2-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{2}$,
- $2R^2-x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 2R^2 \Leftrightarrow x > R\sqrt{2}$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0,R\sqrt{2}]$ et décroissante sur $[R\sqrt{2},2R[$.

Résolvons alors l'équation $f(x) = R^2\sqrt{3}$. On a :

$$f(x) = R^2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2(4R^2-x^2) - 3R^4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 4R^2(x^2) + 3R^4 = 0.$$

Posons alors $g(X) = X^2 - 4R^2X + 3R^4$. Le discriminant Δ de g est égal à $\delta = (4R^2)^2 - 4\cdot 3R^4 = (2R^2)^2 > 0$ (car $R > 0$). Par conséquent, g admet deux racines réelles données par

$$X_1 = \frac{4R^2-2R^2}{2} = R^2 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{4R^2+2R^2}{2} = 3R^2.$$

On en tire que $f(x) = R^2\sqrt{3}$ si et seulement si

$$x_1 = \sqrt{X_1} = R \quad \text{ou} \quad x_2 = -\sqrt{X_1} = -R \quad \text{ou} \quad x_3 = \sqrt{X_2} = R\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x_4 = -\sqrt{X_2} = -R\sqrt{3}.$$

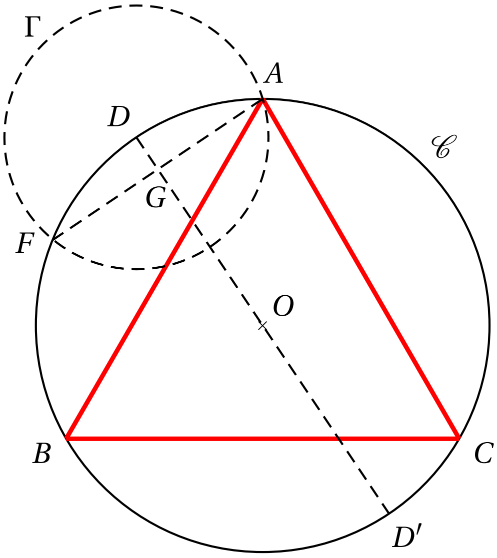
Puisque $x > 0$, les deux solutions de l'équation $f(x) = R^2\sqrt{3}$ sont x_1 et x_3. Enfin, puisque $x_1 = R \in\,]0,R\sqrt{2}]$ et $x_3 = R\sqrt{3} \in [R\sqrt{2},2R[$, le sens de variations de f nous permet de conclure que

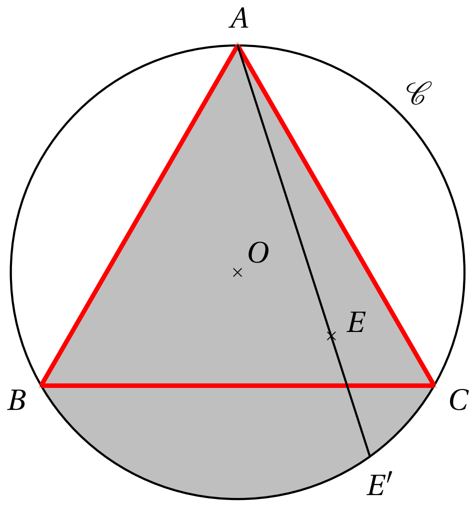
$$f(x) \geqslant R^2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [R,R\sqrt{3}].$$

II.4.6 **Démontrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des nombres réels ρ de l'intervalle $]0,2R[$ tels que $AF \geqslant L$ est le segment $[R, R\sqrt{3}]$.**

Soit $\mathscr{E} = \left\{\rho \in]0,2R[\,\middle|\, AF \geqslant L\right\}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathscr{E} &\overset{\text{II.4.4}}{=} \left\{\rho \in]0,2R[\,\middle|\, \frac{\rho\sqrt{4R^2-\rho^2}}{R} \geqslant L\right\} \\
&\overset{R>0}{=} \left\{\rho \in]0,2R[\mid \rho\sqrt{4R^2-\rho^2} \geqslant LR\right\} \\
&\overset{\text{I.2.3}}{=} \left\{\rho \in]0,2R[\,\middle|\, \rho\sqrt{4R^2-\rho^2} \geqslant R^2\sqrt{3}\right\} \\
&\overset{\text{II.4.5}}{=} \left\{\rho \in]0,2R[\,\middle|\, \rho \in [R, R\sqrt{3}]\right\} \\
&= [R, R\sqrt{3}].
\end{aligned}$$





II.5 **Soit E un point du disque de centre O et de rayon R distinct du point A. La droite (AE) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point noté E' autre que le point A.**

II.5.1 **Démontrer que $AE' \geqslant L$ si et seulement si le point E appartient au domaine grisé sur la figure ci-dessus.**

"$\Rightarrow$" : Supposons que $AE' \geqslant L$. La contraposée de la propriété établie à la question I.1.3 s'écrit : "Soit $P \in \mathscr{C}$. Si $AP \geqslant L$, alors P appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point A." En appliquant cette propriété au point E' qui se trouve sur le cercle, on trouve que E' appartient à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point A. Ceci n'est possible que lorsque E est dans le domaine grisé.

"$\Leftarrow$" : Supposons que E appartienne au domaine grisé. Dans ce cas, les points A et E' sont tous deux sur le cercle, mais de part et d'autre de la droite (BC). Par conséquent, E se trouve sur l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas le point A, et la question I.1.2 permet de conclure que $AE' \geqslant L$.

II.5.2 **Déterminer l'aire du domaine grisé, ensemble des points E du disque tels que la corde $[AE']$ associée soit de longueur supérieure ou égale à L.**

La rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ conserve globalement la figure. Ceci signifie que l'aire de chacune des deux parties non grisées est égale à celle de la partie grisée privée du triangle. Notons $\mathscr{A}_1$ son aire, et $\mathscr{A}_2$ celle du triangle équilatéral ABC, de sorte que l'aire totale, notée $\mathscr{A}$ soit égale à $\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$.

Déterminons $\mathscr{A}_2$: On a déjà vu que $AA'=\frac{3}{2}R$. Par conséquent, puisque les droites (AA') et (BC) sont perpendiculaires, on a

$$\mathscr{A}_2=\frac{BC\cdot AA'}{2}=\frac{\frac{3}{2}R\cdot L}{2}\overset{\text{I.2.3}}{=}\frac{3}{4}R\cdot R\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Déterminons $\mathscr{A}_1$: L'aire du cercle, égale à πR^2, est aussi égale à $3\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2$. D'où

$$\mathscr{A}_1=\frac{\pi R^2-\mathscr{A}_2}{3}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Il vient finalement que

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2+R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=R^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=R^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Partie III : Le paradoxe de Joseph Bertrand

Joseph Bertrand fut élève et professeur à l'École polytechnique, puis professeur au Collège de France. Nous lui devons le paradoxe abordé aujourd'hui qui, au même titre que « l'aiguille de Buffon », a contribué à établir la nécessité de préciser le sens de la phrase « choisir au hasard » quand le choix s'opère dans un ensemble infini.

L'énoncé du problème posé par Joseph Bertrand peut être donné sous la forme suivante :
« *Traçons au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus longue que le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ?* »

Nous allons voir que selon la façon de modéliser le problème, le sens donné au terme « choisir au hasard » varie et les résultats relatifs aux probabilités sont différents.

Dans ce qui suit, on adopte les conventions suivantes :

- ◇ « Choisir au hasard » un réel x dans un intervalle $]a,b[$ (avec $a<b$) signifie que la probabilité que pour tout segment $[c,d]$ inclus dans l'intervalle $]a,b[$, le réel x appartienne au segment $[c,d]$ vaut $\dfrac{d-c}{b-a}$.
- ◇ « Choisir au hasard » un point M dans un segment $[PQ]$ (avec $P\neq Q$) signifie que pour tout segment $[XY]$ inclus dans le segment $[PQ]$, la probabilité que le point M appartienne au segment $[XY]$ vaut $\dfrac{XY}{PQ}$.

◇ **« Choisir au hasard » un point M sur le cercle $\mathscr{C}$ signifie que pour tout arc $\widehat{XY}$ du cercle $\mathscr{C}$, la probabilité que le point M appartienne à l'arc $\widehat{XY}$ vaut $\dfrac{\text{longueur de } \widehat{XY}}{\text{périmètre du cercle}}$.**

◇ **« Choisir au hasard » un point M dans un sous-ensemble Ω du plan dont on peut calculer l'aire (et dont l'aire est non nulle) signifie que, pour tout sous-ensemble Δ de Ω dont on peut calculer l'aire, la probabilité que le point M appartienne au sous-ensemble Δ vaut $\dfrac{\text{aire de } \Delta}{\text{aire de } \Omega}$.**

Dans toute cette partie, nous noterons $P(A)$ la probabilité d'un événement A quelconque.

III.1 ***Premier modèle proposé.***
On fixe A sur le cercle $\mathscr{C}$. On « choisit au hasard » un point P du cercle $\mathscr{C}$.
Calculer la probabilité que la corde $[AP]$ du cercle $\mathscr{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

À partir du point A, on construit le triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$, selon la méthode décrite dans la question I.1. La contraposée de la question II.1.3 nous donne le résultat suivant : "si $AP \geqslant L$, alors P appartient à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant par le point A." Ainsi, la probabilité que la corde $[AP]$ du cercle $\mathscr{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L est la même que la probabilité que P appartienne à l'arc $\widehat{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$ ne contenant par le point A.

Or, d'après la troisième caractérisation du terme « choisir au hasard », il vient que

$$\begin{aligned} P(AP \geqslant L) &= P(P \in \widehat{BC} \text{ ne contenant pas } A) \\ &= \frac{\text{longueur de l'arc } \widehat{BC} \text{ ne contenant pas } A}{\text{périmètre du cercle } \mathscr{C}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

En effet, les trois parties du cercle privé du triangle équilatéral ABC sont les mêmes, signifiant que les petits arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ et $\widehat{CA}$ ont la même longueur, et puisque ces trois petits arcs forment le cercle $\mathscr{C}$, l'addition de leur longueur est égale au périmètre du cercle $\mathscr{C}$.

III.2 ***Deuxième modèle proposé.***
On fixe un diamètre $[AA'']$ du cercle $\mathscr{C}$. On « choisit au hasard » un point I du diamètre $[AA'']$ puis on trace la corde $[MN]$ du cercle $\mathscr{C}$ perpendiculaire au diamètre $[AA'']$ au point I.
Calculer la probabilité que la corde $[MN]$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

Soit encore I_1 le milieu du segment $[OA'']$ et I_2 celui du segment $[OA]$. D'après la question II.2, si $I \in [OI_1]$, alors $MN \geqslant L$. Par symétrie d'axe la perpendiculaire au diamètre $[AA'']$ en O, on aura aussi que si $I \in [OI_2]$, alors $MN \geqslant L$. On en déduit que $P(I \in [I_1 I_2]) = P(MN \geqslant L)$. Par définition de I_1 et I_2, $I_1 I_2 = AA''/2, R/2$.

D'après la deuxième caractérisation du terme « choisir au hasard », il vient que

$$P(MN \geqslant R) = P(I \in [I_1 I_2]) = \frac{I_1 I_2}{AA''} = \frac{\frac{1}{2} R}{R} = \frac{1}{2}.$$

III.3 *Troisième modèle proposé.*

On fixe un point T sur le cercle $\mathscr{C}$. On « choisit au hasard » un réel θ dans l'intervalle $]0,\pi[$ puis on construit une corde $[AS]$ du cercle $\mathscr{C}$ telle que l'angle géométrique $\widehat{ATS}$ ait pour mesure θ.

Calculer la probabilité que la corde $[AS]$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

Les questions II.3.2 et II.3.3 nous assurent que si $\theta < \pi/3$ ou $\theta > 2\pi/3$, alors $AS < L$. La contraposée de cette propriété s'écrit : "si $\theta \geqslant \pi/3$ et $\theta \leqslant 2\pi/3$, alors $AS \geqslant L$." Autrement dit, si $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, alors $AS \geqslant L$, de sorte que $P\big(\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\big) = P(AS \geqslant L)$.

D'après la première caractérisation du terme « choisir au hasard », il vient que

$$P(AS \geqslant L) = P\left(\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]\right) = \frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{\pi - 0} = \frac{\pi/3}{\pi} = \frac{1}{3}.$$

III.4 *Quatrième modèle proposé.*

On fixe un point D du cercle $\mathscr{C}$. On « choisit au hasard » un réel ρ de l'intervalle $]0,2R[$. Alors le cercle $\mathscr{C}$ et le cercle de centre D et de rayon ρ se coupent en deux points distincts notés A et F.

Calculer la probabilité que la corde $[AF]$ du cercle $\mathscr{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

D'après la question II.4.6, les nombres réels ρ de l'intervalle $]0,2R[$ tels que $AF \geqslant L$ sont les réels ρ de l'intervalle $[R, R\sqrt{3}]$. À nouveau, d'après la première caractérisation du terme « choisir au hasard », il vient alors que

$$P(AE' \geqslant L) = P\big(\rho \in [R, R\sqrt{3}]\big) = \frac{R\sqrt{3} - R}{2R - 0} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2R} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,366.$$

III.5 *Cinquième modèle proposé.*

On fixe un point A sur le cercle $\mathscr{C}$. Puis on « choisit au hasard » un point E à l'intérieur du disque de centre O et de rayon R. La droite (AE) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point E', distinct du point A.

Calculer la probabilité que la corde $[AE']$ du cercle $\mathscr{C}$ ait une longueur supérieure ou égale à L.

D'après la question II.5.1, $AE' \geqslant L$ si et seulement si le point E appartient au domaine grisé sur la dernière figure ci-dessus, que l'on note Δ. Puisque Δ est un sous-ensemble du disque Ω de centre O et de rayon R, et que nous savons calculer l'aire de ces deux domaines, la dernière caractérisation du terme « choisir au hasard » nous permet d'écrire que

$$P(AF \geqslant L) = P(E \in \Delta) = \frac{\text{aire de } \Delta}{\text{aire de } \Omega} \overset{\text{II.5.2}}{=} \frac{R^2\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\pi R^2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,609.$$

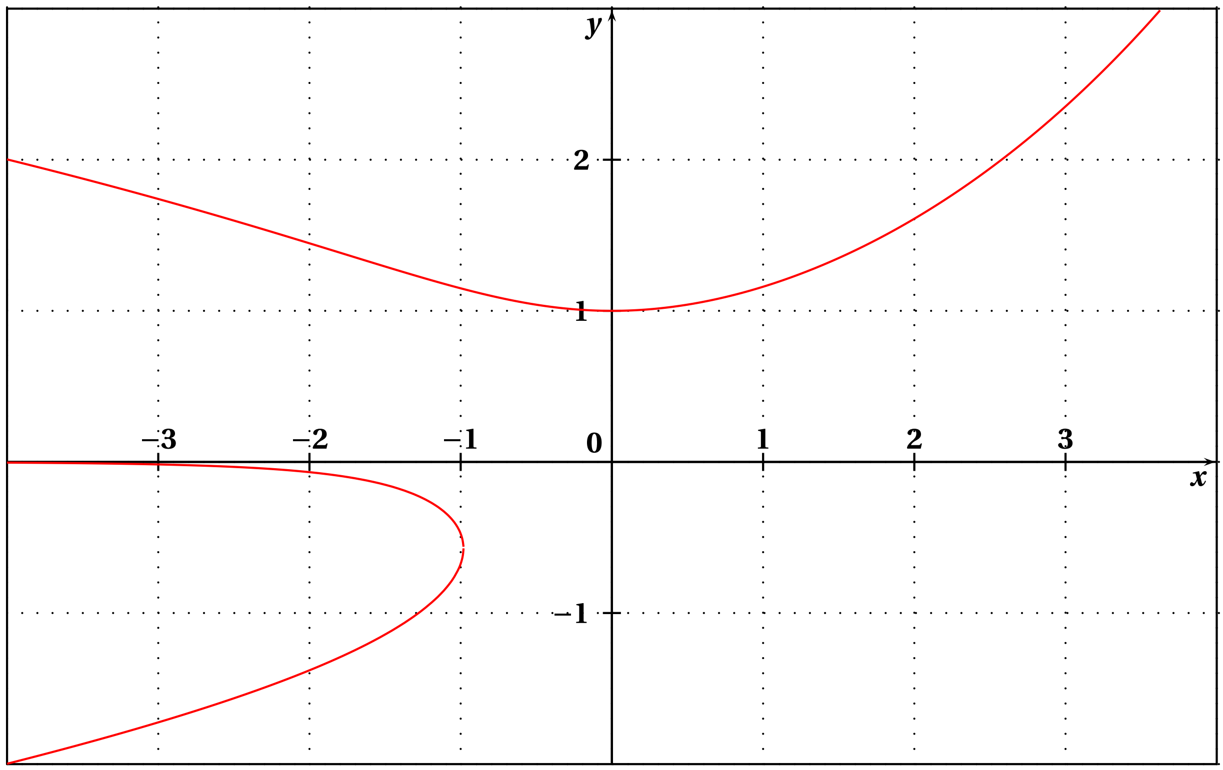
Problème 2 : Étude d'une courbe plane définie par une équation implicite

Présentation du problème : On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère la courbe Γ du plan définie par l'équation suivante dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$y^3 + xy - e^x = 0,$$

ce qui signifie qu'un point M du plan de coordonnées (x,y) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un point de la courbe Γ si et seulement si $y^3 + xy - e^x = 0$.

Un logiciel de tracé de courbes nous montre (approximativement) les points de la courbe Γ pour $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et $-2 \leqslant y \leqslant 3$:



Le but de ce problème est l'étude de l'ensemble des points Γ d'ordonnée strictement positive.

La partie I prouve l'existence d'une fonction f telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement positive est une courbe Γ_1 d'équation $y = f(x)$. La partie II étudie les variations de la fonction f et la partie III permet la mise en évidence d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1.

On pourrait également prouver l'existence d'une fonction g telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement négative est une courbe Γ_2 d'équation $x = g(y)$, mais cette étude n'est pas développée dans ce problème.

Partie I : Définition de la fonction f

I.1 **Justifier l'existence d'un unique point de Γ d'abscisse $x = 0$.**

Lorsque $x = 0$, le point $M(x, y) = M(0, y)$ (s'il existe) doit vérifier l'égalité $y^3 + xy - e^x = y^3 - 1 = 0$ pour se trouver sur Γ. Cette équation est équivalente à $y^3 = 1$, et puisque y est un nombre réel, il vient $y = 1$. La solution de cette équation existe et est unique, assurant l'existence d'un unique point de Γ d'abscisse nulle.

I.2 **Démontrer qu'aucun point M de Γ n'a une ordonnée nulle, c'est-à-dire que l'intersection de Γ avec l'axe $x'Ox$ d'équation $y = 0$ est vide.**

Si un point M de Γ a une ordonnée nulle, alors les coordonnées $(x, y) = (x, 0)$ de ce point doivent vérifier l'égalité $y^3 + xy - e^x = -e^x = 0$. Cette équation n'admet aucune solution puisque $e^x > 0$ pour tout réel x. Ceci prouve qu'aucun point M de Γ n'a une ordonnée nulle.

I.3 **Dans cette question on note φ_2 la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0, +\infty[$ par $\varphi_2(t) = t^3 + 2t - e^2$.**

I.3.1 **Soit t un nombre réel strictement positif vérifiant l'équation $\varphi_2(t) = 0$, s'il en existe. Que peut-on dire du point M de coordonnées $(2, t)$?**

Supposons qu'il existe un nombre réel t strictement positif vérifiant l'équation $\varphi_2(t) = 0$. Alors

$$\varphi_2(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^3 + 2t - e^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M(2, t) \in \Gamma.$$

I.3.2 **Justifier que la fonction φ_2 est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.**

La fonction φ_2 est une fonction polynômiale de degré 3. Elle est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$, on a :

$$\varphi_2'(t) = 3t^2 + 2.$$

I.3.3 **Dresser le tableau de variations de la fonction φ_2.**

Remarquons que $3t^2 + 2 > 0$ pour tout réel t. Le tableau de variations de la fonction φ_2 est donné ci-dessous :

t	0		$+\infty$
$\varphi_2'(t)$	$\Vert$	$+$	
φ_2	$\Vert$ $-e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus, $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_2(t) = 0^3 + 2 \cdot 0 - e^2 = -e^2$.

Rappelons que la limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynômiale est déterminé par la limite du terme de plus haut degré, d'où $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi_2(t) = \lim\limits_{t \to \infty} t^3 = +\infty$.

I.3.4 **En déduire qu'il existe un unique réel y_2 strictement positif tel que $\varphi_2(y_2) = 0$.**

D'après la question précédente, la fonction φ_2 est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de cet intervalle vers $]-e^2, +\infty[$ qui contient le nombre 0. Par définition d'une bijection, il existe un unique nombre $y_2 > 0$ tel que $\varphi_2(y_2) = 0$.

I.3.5 **À l'aide de la calculatrice, justifier l'encadrement suivant :**

$$\frac{3}{2} < y_2 < \frac{7}{4}.$$

Par stricte croissance de la fonction φ_2 sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on a :

$$\frac{3}{2} < y_2 < \frac{7}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_2\left(\frac{3}{2}\right) < \varphi_2(y_2) < \varphi_2\left(\frac{7}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_2\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < \varphi_2\left(\frac{7}{4}\right).$$

Or, la calculatrice donne :

$$\begin{aligned}
\varphi_2\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right) - e^2 = \frac{27}{8} + 3 - e^2 \approx -1{,}01 < 0 \\
\varphi_2\left(\frac{7}{4}\right) &= \left(\frac{7}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{7}{4}\right) - e^2 = \frac{384}{64} + \frac{7}{2} - e^2 \approx 1{,}47 > 0.
\end{aligned}$$

La troisième double-inégalité précédente étant vraie, il vient par équivalence que la première l'est aussi, d'où l'encadrement recherché.

I.4 **Dans cette question on note φ_{-2} la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0, +\infty[$ par $\varphi_{-2}(t) = t^3 - 2t - e^{-2}$.**

I.4.1 **Dresser le tableau de variations de la fonction φ_{-2}.**

Remarquons que la fonction φ_{-2} est aussi une fonction polynômiale de degré 3. Elle est ainsi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]0, +\infty[$, et pour tout réel t de cet intervalle, on a

$$\varphi'_{-2}(t) = 3t^2 - 2.$$

Observons encore que

$$\begin{aligned}
3t^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow t^2 = \frac{2}{3} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\
3t^2 - 2 > 0 &\Leftrightarrow t^2 > \frac{2}{3} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t > \sqrt{\frac{2}{3}}, \\
3t^2 - 2 < 0 &\Leftrightarrow t^2 < \frac{2}{3} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t < \sqrt{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

Cette étude nous permet de dresser le tableau de variations de la fonction φ_{-2} :

t	0		$\sqrt{2/3}$		$+\infty$
$\varphi'_{-2}(t)$	‖	$-$	0	$+$	
φ_{-2}	‖ $\approx -0{,}14$	$\searrow$	$\approx -1{,}22$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\diamond$ $\lim\limits_{t \to 0} \varphi_{-2}(t) = -e^{-2} \approx -0{,}14$,
- $\diamond$ $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi_{-2}(t) = \lim\limits_{t \to \infty} t^3 = +\infty$,
- $\diamond$ $\varphi_{-2}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} - e^{-2} \approx -1{,}22.$

I.4.2 **En déduire qu'il existe un unique nombre réel y_{-2} strictement positif tel que $\varphi_{-2}(y_{-2}) = 0$.**

Sur l'intervalle $]0, \sqrt{2/3}]$: La fonction φ_{-2} est strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]0, \sqrt{2/3}]$ vers $\left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - e^{-2}, -e^{-2}\right[$ qui ne contient pas le nombre 0. Par définition d'une bijection, il n'existe aucun nombre dans l'intervalle $]0, \sqrt{2/3}]$ tel que son image par φ_{-2} soit égale à 0.

Sur l'intervalle $[\sqrt{2/3}, +\infty[$: La fonction φ_{-2} est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[\sqrt{2/3}, +\infty[$ vers $\left[-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - e^{-2}, +\infty\right[$ qui contient le nombre 0. Par définition d'une bijection, il existe donc un unique nombre y_{-2} dans l'intervalle $[\sqrt{2/3}, +\infty[$ tel que $\varphi_{-2}(y_{-2}) = 0$.

Au final, il existe un unique nombre y_2 strictement positif tel que $\varphi_{-2}(y_{-2}) = 0$.

I.4.3 **Prouver que $1,45$ est une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-3}$ près du nombre réel y_{-2}.**

On a les équivalences suivantes :

$$1,445 < y_{-2} < 1,455 \Leftrightarrow \varphi_{-2}(1,445) < \varphi_{-2}(y_{-2}) < \varphi_{-2}(1,455) \Leftrightarrow \varphi_{-2}(1,445) < 0 < \varphi_{-2}(1,455).$$

La calculatrice donne alors :

$$\begin{aligned} \varphi_{-2}(1,445) &= (1,445)^3 - 2 \cdot 1,445 - e^{1,445} \approx -0,0081 < 0, \\ \varphi_{-2}(1,455) &= (1,455)^3 - 2 \cdot 1,455 - e^{1,455} \approx 0,0349 > 0. \end{aligned}$$

La troisième double-inégalité ci-dessus est donc vraie, et par équivalence, la première l'est aussi, nous prouvant que $1,45$ est une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-3}$ près.

I.5 **Dans cette question, x est un nombre réel quelconque fixé. On note φ_x la fonction définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $]0, +\infty[$ par :**

$$\boldsymbol{\varphi_x(t) = t^3 + xt - e^x.}$$

I.5.1 **Justifier que la fonction φ_x est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.**

La fonction φ_x est une fonction polynômiale de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel $t > 0$, on a donc :

$$\varphi_x'(t) = 3t^2 + x.$$

I.5.3 **Dresser le tableau de variations de la fonction φ_x dans chacun des deux cas suivants :**
- ◇ $x < 0$,
- ◇ $x \geqslant 0$.

Supposons tout d'abord que $\boldsymbol{x<0}$. Alors $-x>0$ et

$$\varphi'_x(t)\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2\leqslant -\frac{x}{3} \quad\overset{t>0}{\Leftrightarrow}\quad t\leqslant\sqrt{-\frac{x}{3}}.$$

On peut ainsi dresser le tableau de variations de la fonction φ_x lorsque $x<0$:

t	0		$\sqrt{-\frac{x}{3}}$		$+\infty$
$\varphi'_x(t)$		$-$	0	$+$	
φ_x	$-e^x<0$	$\searrow$	$<-e^x$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{t\to 0}\varphi_x(t)=-e^x$,
- $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}t^3=+\infty$,
- $\varphi_x\left(\sqrt{-\frac{x}{3}}\right) = -\frac{x}{3}\sqrt{-\frac{x}{3}}-2\sqrt{-\frac{x}{3}}-e^{-2} = \underbrace{\frac{2x}{3}}_{<0}\underbrace{\sqrt{-\frac{x}{3}}}_{>0}-e^x<-e^x$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{x\geqslant 0}$. Alors

$$\varphi'_x(t)=3t^2+x>0 \quad (\text{car } t>0).$$

On peut ainsi dresser le tableau de variations de la fonction φ_x lorsque $x\geqslant 0$:

t	0		$+\infty$
$\varphi'_x(t)$		$+$	
φ_x	$-e^x<0$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus,

$\lim\limits_{t\to 0}\varphi_x(t)=-e^x<0$ et
$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_x(t)=\lim\limits_{t\to\infty}t^3=+\infty$.

I.5.3 **Déduire de cette étude que, pour tout nombre réel $\boldsymbol{x}$, il existe un unique nombre réel $\boldsymbol{y_x}$ strictement positif tel que $\boldsymbol{\varphi_x(y_x)=0}$. Ce nombre réel $\boldsymbol{y_x}$ est noté $\boldsymbol{f(x)}$.**

$\boldsymbol{x<0}$: Sur l'intervalle $]0,\sqrt{-x/3}]$: La fonction φ_x est strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]0,\sqrt{-x/3}]$ vers $\left[\varphi_x\left(\sqrt{-\frac{x}{3}}\right),-e^x\right[$ qui ne contient pas le nombre 0. Par définition d'une bijection, il n'existe aucun nombre dans l'intervalle $]0,\sqrt{-x/3}]$ tel que son image par φ_x soit égale à 0.

Sur l'intervalle $[\sqrt{-x/3},+\infty[$: La fonction φ_x est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[\sqrt{-x/3},+\infty[$ vers $\left[\varphi_x\left(\sqrt{-\frac{x}{3}}\right),+\infty\right[$ qui contient le nombre 0. Par définition d'une bijection, il existe donc un unique nombre y_x dans l'intervalle $[\sqrt{-x/3},+\infty[$ (inclus dans l'intervalle $]0,+\infty[$) tel que $\varphi_x(y_x)=0$.

$\boldsymbol{x\geqslant 0}$: La fonction φ_x est strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ vers $[-e^x,+\infty[$ qui contient le nombre 0. Par définition d'une bijection, il existe donc un unique nombre y_x dans l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que $\varphi_x(y_x)=0$.

Au total, quelque soit le réel x, il existe un unique nombre y_x dans l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que $\varphi_x(y_x)=0$. Ce nombre sera noté dans la suite du problème $f(x)$.

$\boldsymbol{x}$ désignant un nombre réel fixé, $\boldsymbol{f(x)}$ est donc déterminé par les conditions suivantes :

$$\textbf{(1)} \qquad \left[f(x)\right]^3+x\,f(x)-e^x=0 \quad\text{et}\quad f(x)>0.$$

Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La courbe Γ_1 représentative de la fonction f dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est l'ensemble des points de la courbe Γ d'ordonnée strictement positive.

I.6 ***Quelques études de signes.***

I.6.1 **Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $3[f(x)]^2+x>0$.**

On a, pour tout nombre réel x, les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Leftrightarrow \quad [f(x)]^3+xf(x)=e^x \quad \text{et} \quad f(x)>0\\
&\Leftrightarrow \quad [f(x)]^2+x=\frac{e^x}{f(x)} \quad \text{et} \quad f(x)>0\\
&\Rightarrow \quad [f(x)]^2+x>0\\
&\Rightarrow \quad 3[f(x)]^2+x>0 \quad \text{car } 2[f(x)]^2>0.
\end{aligned}$$

I.6.2 **Démontrer, à l'aide de la question I.5.2, que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel t strictement positif, les expressions t^3+xt-e^x et $t-f(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.**

D'après la question I.5.3, la fonction φ_x s'annule en $f(x)$, pour tout réel x. Ensuite, la fonction $t\mapsto t-f(x)$ s'annule clairement pour $t=f(x)$, justifiant que les deux expressions t^3+xt-e^x et $t-f(x)$ s'annulent simultanément, pour tout réel x.

De plus, d'après la questions I.5.2, on peut affirmer que pour tout réel x, le nombre $\varphi_x(t)$ est négatif sur $]0,f(x)]$ et positif sur $[f(x),+\infty[$. De plus,

$$t-f(x)>0\Rightarrow t>f(x), \qquad \text{et} \qquad t-f(x)<0\Rightarrow t<f(x),$$

justifiant ainsi que ces deux expressions sont de même signe pour tout réel x.

I.7 ***Calcul de quelques valeurs de f.***

I.7.1 **Déterminer $f(0)$.**

Nous déterminons $f(0)$ simplement en remplaçant x par 0 dans la relation (1) :

$$[f(0)]^3+0\,f(0)-e^0=0\Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow [f(0)]^3=1 \quad \overset{f(0)>0}{\Leftrightarrow} \quad f(0)=1.$$

I.7.2 **Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de $f(2)$ et de $f(-2)$.**

Nous savons déjà que $y_{-2}=f(-2)\approx 1,45$ est une valeur approchée à $5\cdot 10^{-3}$ près, donc *a fortiori* à 10^{-2} près, d'après la question I.4.3.

L'encadrement

$$\frac{3}{2}<y_2<\frac{7}{4}$$

trouvé à la question I.3.5 ne permet cependant pas de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du nombre $y_2=f(2)$. Un tableur nous donne alors les valeurs approchées suivantes, pour x compris entre 1,5 et 1,75 :

x	$\varphi_2(x)$	x	$\varphi_2(x)$	x	$\varphi_2(x)$
1,505	−0,970193474	1,605	−0,044535974	1,705	0,977421526
1,515	−0,881790224	1,615	0,053227276	1,715	1,085144776
1,525	−0,792477974	1,625	0,151959526	1,725	1,193897026
1,535	−0,702250724	1,635	0,251666776	1,735	1,303684276
1,545	−0,611102474	1,645	0,352355026	1,745	1,414512526
1,555	−0,519027224	1,655	0,454030276		
1,565	−0,426018974	1,665	0,556698526		
1,575	−0,332071724	1,675	0,660365776		
1,585	−0,237179474	1,685	0,765038026		
1,595	−0,141336224	1,695	0,870721276		

Ce tableau nous assure que

$$-0,044535974 < 0 < 0,053227276 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_2(1,605) < \varphi_2\big(f(2)\big) < \varphi_2(1,615).$$

Par stricte croissance de la fonction φ_2 sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (question I.3.3), cette dernière inégalité implique que

$$1,605 \leqslant f(2) < 1,615.$$

Puisque l'arrondi à 10^{-2} près de tout nombre compris dans l'intervalle $[1,605\ ;\ 1,615[$ est $1,61$, on en déduit que $f(2) \approx 1,61$ est une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Partie II : Étude des variations de la fonction f

II.1 **<u>*Nous admettrons*</u> que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.**

II.1.1 **Démontrer, à l'aide des conditions (1) et de la question I.6, qu'on a pour tout nombre réel x :**

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3\big[f(x)\big]^2 + x}}.$$

La dérivation de la relation (1) donne les implications suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad 3f'(x)\,\big[f(x)\big]^2 + \big(1\cdot f(x) + x\cdot f'(x)\big) - e^x = 0\\
&\Leftrightarrow \quad f'(x)\Big(3\big[f(x)\big]^2 + x\Big) = e^x - f(x)\\
&\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{e^x - f(x)}{3\big[f(x)\big]^2 + x} \quad \text{car } 3\big[f(x)\big]^2 + x > 0 \text{ d'après I.6.1.}
\end{aligned}$$

II.1.2 **En déduire que pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} + x - 1$.**

Soit x un réel quelconque. D'après la question I.6.1, l'expression $3\big[f(x)\big]^2 + x$ est strictement positive : $f'(x)$ est donc du signe de l'expression $e^x - f(x)$ d'après le résultat précédent.

Or $e^x > 0$, donc la question I.6.2 nous assure que les expressions $e^x - f(x)$ et $(e^x)^3 + x\,e^x - e^x = e^x(e^{2x} + x - 1)$ sont de même signes, impliquant donc que $f'(x)$ est du même signe que l'expression $e^x(e^{2x} + x - 1)$.

Enfin, puisque $e^x > 0$, les expressions $e^x(e^{2x}+x-1)$ et $e^{2x}+x-1$ sont de même signe, ce qui nous permet finalement de conclure que $f'(x)$ est du signe de $e^{2x}+x-1$.

II.1.3 **Étudier les variations de la fonction u définie pour tout nombre réel x par :**

$$\boldsymbol{u(x) = e^{2x} + x - 1.}$$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables. De plus, pour tout réel x,

$$u'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0,$$

ce qui nous permet d'écrire que la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

II.1.4 **En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x.**

Remarquons que $u(0) = 0$. La question II.1.2 nous permet alors d'être légèrement plus précis :
- Pour tout x dans $]-\infty, 0[$, $u(x) < 0$, ce qui implique que $f'(x) < 0$,
- Pour tout x dans $]0, +\infty[$, $u(x) > 0$, ce qui implique que $f'(x) > 0$.

Vérifions encore que $f'(0)$ vaut bien 0 :

$$f'(0) = \frac{e^0 - f(0)}{3\left[f(0)\right]^2 - 0} \overset{\text{I.7.1}}{=} \frac{1-1}{1^2 - 0} = 0.$$

II.2 *Calcul des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*

II.2.1 **Démontrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.**

La question I.6.1 amène les équivalences suivantes, valables en particulier pour tout nombre réel x négatif :

$$3\left[f(x)\right]^2 + x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[f(x)\right]^2 > -\frac{x}{3} \quad \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \quad f(x) > \sqrt{-\frac{x}{3}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-x/3} = +\infty$, donc par théorème de comparaison, il vient que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

II.2.2 **Déterminer la limite de $e^x - x^3 - x^2$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif A tel que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à A, on a :**

$$\boldsymbol{e^x \geqslant x^3 + x^2.}$$

Pour tout nombre réel x, on a :

$$e^x - x^3 - x^2 = x^3\left(\frac{e^x}{x^3} - 1 - \frac{1}{x}\right).$$

Par croissances comparées entre la fonction exponentielle et la fonction puissance, on sait que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty, \qquad \text{et de plus,} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

On en déduit alors que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x - x^3 - x^2 = +\infty$. Par définition de la limite,

$$\forall\, B \geqslant 0, \quad \exists\, A > 0 \quad | \quad \forall\, x \geqslant A, \quad e^x - x^3 - x^2 \geqslant B,$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$\exists\, A > 0 \mid \forall\, x \geqslant A, \quad e^x - x^3 - x^2 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists\, A > 0 \mid \forall\, x \geqslant A, \quad e^x \geqslant x^3 + x^2.$$

II.2.3 **Démontrer que pour tout nombre réel x supérieur ou égal à A, on a : $f(x) \geqslant x$.**

La question I.6.2 nous assure que les expressions $t^3 + xt - e^x$ et $t - f(x)$ sont de même signe. Or, lorsque $t = x \geqslant A$, le résultat précédent nous permet d'écrire que $x^3 + x^2 - e^x \leqslant 0$, ce qui implique donc que $x - f(x) \leqslant 0$. D'où le résultat :

$$\forall\, x \geqslant A, \quad f(x) \geqslant x.$$

II.2.4 **En déduire que la fonction f a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.**

Puisque $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$, le théorème de comparaison et le résultat rpécédent permettent de conclure directement que f admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

II.3 **Dresser le tableau de variations de la fonction f.**

Les questions
- ◇ I.7.1 pour la valeur en 0 de la fonction f,
- ◇ II.1.4 pour le signe du nombre $f'(x)$,
- ◇ II.2.1 pour la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et
- ◇ II.2.4 pour la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

nous permettent de dresser aisément le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Partie III : Étude d'une courbe asymptote à la courbe Γ_1

Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur l'intervalle $]-\infty,0[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que les courbes d'équations $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $x = -\infty$ quand $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f_2(x) - f_1(x)\big) = 0$.

Si de plus pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty,0[$, on a $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, on dit que la courbe d'équation $y = f_2(x)$ est au-dessus de la courbe d'équation $y = f_1(x)$.

III.1 *Recherche d'une courbe asymptote à Γ_1 au voisinage de $x = -\infty$.*

III.1.1 Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x}.$$

On a les équivalences suivantes, pour tout nombre réel x :

$$(1) \Leftrightarrow \big[f(x)\big]^3 + x\,f(x) - e^x = 0 \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \big[f(x)\big]^2 = \frac{e^x}{f(x)} - x \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{f(x)} - x}.$$

III.1.2 Démontrer que la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ est asymptote à la courbe Γ_1 représentative de la fonction f au voisinage de $x = -\infty$, et déterminer la position relative de ces deux courbes lorsque le nombre réel x décrit l'intervalle $]-\infty,0[$.

Soit x un nombre réel négatif quelconque, de sorte que $\sqrt{-x} \geqslant 0$. Alors, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
f(x) - \sqrt{-x} &= \frac{\big(f(x) - \sqrt{-x}\big)\big(f(x) + \sqrt{-x}\big)}{f(x) + \sqrt{-x}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\dfrac{e^x}{f(x)} - x}\right)^2 - \big(\sqrt{-x}\big)^2}{f(x) + \sqrt{-x}} \\
&= \frac{\dfrac{e^x}{f(x)} - x - (-x)}{f(x) + \sqrt{-x}} \quad = \quad \frac{e^x}{f(x)\big(f(x) + \sqrt{-x}\big)}.
\end{aligned}$$

Les nombres e^x, $f(x)$ et $\sqrt{-x}$ étant strictement positif sur $]-\infty,0[$, on en déduit que pour tout nombre réel x strictement négatif, $f(x) - \sqrt{-x} > 0$, soit $f(x) > \sqrt{-x}$. Par définition, la courbe Γ_1 représentative de f se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = \sqrt{-x}$ sur l'intervalle $]-\infty,0[$.

De plus, la fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Une transformation des conditions (1) nous amène alors à écrire que :

$$\begin{aligned}
& f(x)=\frac{e^x-\left[f(x)\right]^3}{x}>0 \quad \overset{x<0}{\Rightarrow} \quad e^x-\left[f(x)\right]^3<0 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{x}{3}}<f(x) \\
\Rightarrow\ & f(x)\left(f(x)+\sqrt{-x}\right)>e^{\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{x}{3}}+\sqrt{-x}\right) \\
\Rightarrow\ & (0<)\frac{e^x}{f(x)\left(f(x)+\sqrt{-x}\right)}<\frac{e^x}{e^{\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{x}{3}}+\sqrt{-x}\right)} \\
\Rightarrow\ & 0<f(x)-\sqrt{-x}<\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{e^{\frac{x}{3}}+\sqrt{-x}} \\
\Rightarrow\ & 0<f(x)-\sqrt{-x}<\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{e^{\frac{x}{3}}\left(1+\frac{\sqrt{-x}}{e^{\frac{x}{3}}}\right)} \\
\Rightarrow\ & 0<f(x)-\sqrt{-x}<\frac{e^{\frac{x}{3}}}{1+\frac{\sqrt{-x}}{e^{\frac{x}{3}}}}.
\end{aligned}$$

L'implication de la troisième est possible car le dénominateur est strictement positif, donc non nul.

Or, d'après les croissances comparées entre la fonction exponentielle et la fonction racine carrée, on peut dire que

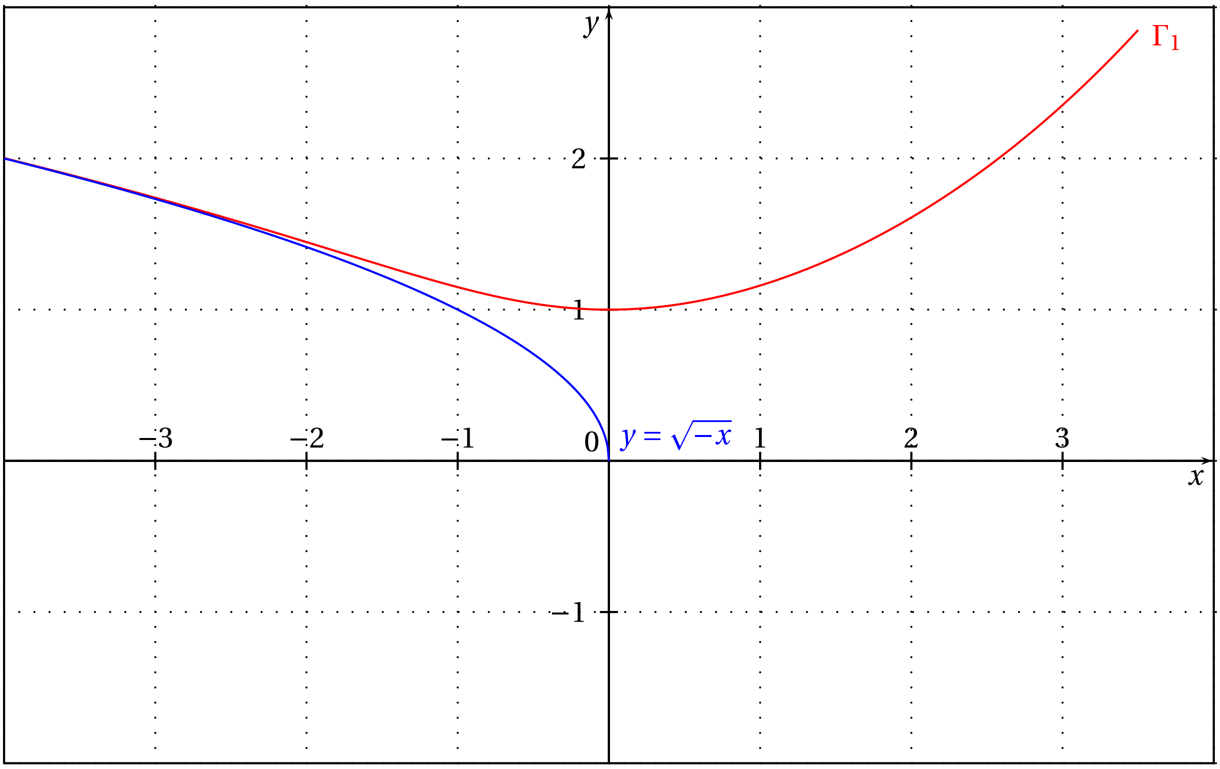
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{e^{\frac{x}{3}}}=+\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{1+\frac{\sqrt{-x}}{e^{\frac{x}{3}}}}=0.$$

On applique alors le théorème des gendarmes qui nous assure que

$$0\leqslant\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\sqrt{-x}\right)\leqslant\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{1+\frac{\sqrt{-x}}{e^{\frac{x}{3}}}} \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\sqrt{-x}\right)\leqslant 0,$$

c'est-à-dire $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\sqrt{-x}\right)=0$. Par définition, la courbe d'équation $y=\sqrt{-x}$ est donc asymptote à la courbe Γ_1 représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

III.2 **Tracer dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe Γ_1 et la courbe d'équation $y=\sqrt{-x}$, avec une unité graphique de 2 cm.**



y
x
Γ_1
$y = \sqrt{-x}$
0
−3
−2
−1
1
2
3
2
1
−1

Remarques

Il est dit dans l'énoncé : "on pourrait également prouver l'existence d'une fonction g telle que l'ensemble des points de Γ d'ordonnée strictement négative est une courbe Γ_2 d'équation $x = g(y)$ mais cette étude n'est pas développée dans ce problème." Développons-là quand simple, ne serait-ce que par curiosité...

Montrons d'abord l'existence d'une telle fonction g :
Soit y un nombre réel strictement négatif fixé. Définissons, pour tout t de l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction

$$\psi_y(t) = y^3 + ty - e^t.$$

Cette fonction est clairement dérivable en tant que sommes de fonctions dérivables, et pour tout $t \in]-\infty, 0[$, on a

$$\psi'_y(t) = y - e^t < 0 \quad \text{car } y < 0.$$

Puisqu'en plus

$$\lim_{t\to-\infty} \psi_y(t) = y^3 - y\cdot\infty - 0 \overset{y<0}{\Rightarrow} \lim_{t\to-\infty} \psi_y(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0} \psi_y(t) = y^3 - y\cdot 0 - 1 = y^3 - 1 < 0,$$

on en déduit que ψ_y est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, réalisant ainsi une bijection de cet intervalle dans $[y^3 - 1, +\infty[$ qui contient 0. En conséquence, il existe un unique nombre $x_y \in]-\infty, 0[$ tel que $\psi_y(x_y) = 0$.

Ce nombre sera noté dans la suite $g(y)$, de sorte que (toujours pour un nombre réel strictement négatif y fixé) $g(y)$ soit déterminé par les conditions suivantes :

$$(2) \qquad y^3 + y\,g(y) - e^{g(y)} = 0 \quad \text{et} \quad g(y) < 0.$$

la fonction g est définie sur $\mathbb{R}_-^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_-^*$. La courbe Γ_2 représentative de la fonction g dans le repère $(0; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est l'ensemble des points de la courbe Γ d'ordonnée strictement négative.

Étudions maintenant la limite en $-\infty$ et les variations de cette fonction g :
y est encore un nombre réel strictement négatif fixé. La limite ne nous intéresse pas pour la recherche de l'asymptote.

D'une part, la dérivation de l'égalité (2) nous donne (toujours avec $g(y) < 0$)

$$3y^2 + g(y) + y\,g'(y) - g'(y)\,e^{g(y)} = 0 \Leftrightarrow g'(y) = \frac{3y^2 + g(y)}{e^{g(y)} - y}. \quad (\flat)$$

Puisque y est strictement négatif, le dénominateur est strictement positif, entraînant que $g'(y)$ est du même signe que $3y^2 + g(y)$. Rappelons que nous avons déterminé que la fonction ψ_t était strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et que $\psi_t\big(g(y)\big) = 0$. Par conséquent, les nombres $\psi_y(t)$ et $-t + g(y)$ sont du même signe. En particulier, pour $t = -3y^2$, on aura que $\psi_y(-3y^2)$ est du même signe que $3y^2 - g(y)$, donc que $g'(y)$. Or

$$\psi_y(-3y^2) = y^3 - 3y^2\,y - e^{-3y^2} = -2y^3 - e^{-3y^2} = -\big(e^{-3y^2} + 2y^3\big).$$

Posons alors $h(y) = -\big(e^{-3y^2} + 2y^3\big)$ pour tout nombre réel y strictement négatif. Cette fonction est dérivable sur $]-\infty, 0[$ en tant que somme de fonction dérivables, et pour tout y de cet intervalle, on a

$$h'(y) = -\big(-6y\,e^{-3y^2} + 6y^2\big) = 6y\big(e^{-3y^2} - y\big).$$

Puisque $y<0$, $-y>0$ implique $e^{-3y^2}-y>0$. Et puisque $6y<0$, il vient que $h(y)<0$ pour tout nombre réel y strictement négatif, entraînant que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty,0[$. De plus, quelques calculs simples de limites donnent :

$$\lim_{y\to-\infty} h(y)=+\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{y\to 0} h(y)=-1.$$

Par conséquent, la fonction h opère une bijection de l'intervalle $]-\infty,0[$ vers $]-1,+\infty[$ qui contient 0. Par définition d'une bijection, il existe un unique nombre $\alpha<0$ tel que $h(\alpha)=0$. On arrive à déterminer à la calculatrice que $\alpha\approx-0,57$.

Grâce à toutes les informations, on peut maintenant donner le tableau de variations de la fonction g (les valeurs de ligne "g" sont calculées en-dessous) :

y	$-\infty$		$\alpha\approx-0,57$		0
$h(y)=\psi_y(-3y^2)$		$+$	0	$-$	||
$g'(y)$		$+$	0	$-$	||
g		$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	||

Par ailleurs, pour tout $y<0$,

$$e^y-y^3-y^2=y^3\left(\frac{e^y}{y^3}-1-\frac{1}{y}\right).$$

Par croissances comparées et autres calculs simples de limites, on détermine facilement que $\lim_{y\to-\infty} e^y-y^3-y^2=+\infty$. Autrement dit,

$$\forall\, B\geqslant 0,\ \exists\, A<0 \mid \forall\, y\leqslant A,\quad e^y-y^3-y^2>B,$$

ce qui s'écrit plus simplement :

$$\exists\, A<0 \mid \forall\, y\leqslant A,\quad e^y-y^3-y^2\geqslant 0.$$

Posons alors $t=y\leqslant A$, de sorte que $-\psi_y(y)=e^y-y^3-y^2\geqslant 0$. Puisque $-\psi_y(t)$ et $t-g(y)$ ont le même signe, on en déduit que pour tout $y\leqslant A$, $y-g(y)\geqslant 0$, soit $g(y)\leqslant y$. Enfin, puisque $\lim_{y\to-\infty} y=-\infty$, le théorème de comparaison permet de conclure que

$$\lim_{y\to-\infty} g(y)=-\infty.$$

Courbe asymptote :
Montrons que la courbe d'équation $y=-\sqrt{-x}$ est asymptote à la courbe Γ_2 au voisinage de $y=-\infty$. Remarquons tout d'abord que

$$y=-\sqrt{-x} \quad\Leftrightarrow\quad y^2=-x \quad\Leftrightarrow\quad x=-y^2.$$

Pour tout $y<0$, on a aussi

$$g(y)-(-y^2)=\frac{e^{g(y)}-y^3}{y}+y^2=\frac{e^{g(y)}-y^3+y^3}{y}=\frac{e^{g(y)}}{y}.$$

Par croissances comparées, et connaissant la limite de la fonction g en $-\infty$, on en déduit que

$$\lim_{y\to-\infty}\big(g(y)-(-y^2)\big)=0,$$

autrement dit que les courbes d'équation $x=-y^2$ (ou $y=-\sqrt{-x}$) et Γ_2 sont asymptotes au voisinage de $y=+\infty$.

Il ne reste plus qu'à compléter la graphique précédent, surtout sous l'axe des abscisses déjà noté $x'Ox$: