MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES 2007
– CORRIGÉ –

Exercice 1

Die Jundendliche haben den ersten Satz gut verstanden : 68 % von 25 Personen macht 17 Personen ; wenn alle Erwachsene das Geschirr spülen mussten, dann musste man noch 8 Jugendliche dazusetzen um das Geschirr zu spülen um die Zahl von 17 Personen zu erreichen.

Im Gegenteil, wenn die Jugendliche das Geschirr spülten, musste mann ein Erwachsene haben um die Zahl von 17 Personen zu erreichen, also nicht 2 Erwachsene.

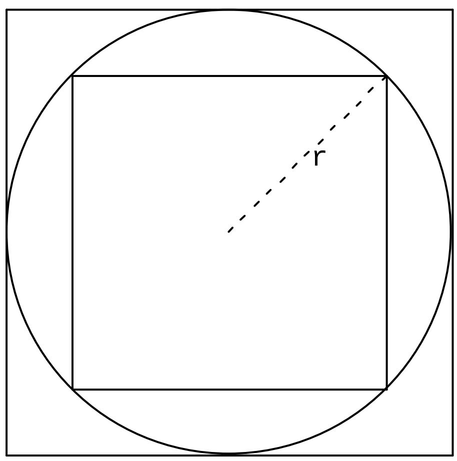
Exercice 2

Le chat et la souris sont tous deux sur une case noire en début de parcours. Supposons qu'aucun des deux animaux ne passe par le triangle. Alors après la n-ième avancée de la souris, il restera toujours deux cases entre le chat et la souris. Il faut donc que l'un d'entre eux passe par le triangle pour échanger la couleur des cases sur lesquelles ils se trouvent après que chacun ait effectué son pas.

Conclusion : La stratégie pour le chat consiste à passer par le triangle si la souris ne l'a pas déjà fait, puis s'arranger pour pousser la souris le plus loin possible (la souris ne pourra plus avancer comme elle veut) avant de pouvoir obligatoirement la manger. Si la souris est passée par le triangle, il n'a qu'à éviter d'y passer lui aussi. Il faut qu'il inverse les couleurs sur lesquels ils se trouvent après l'avancée de la souris.

Exercice 3

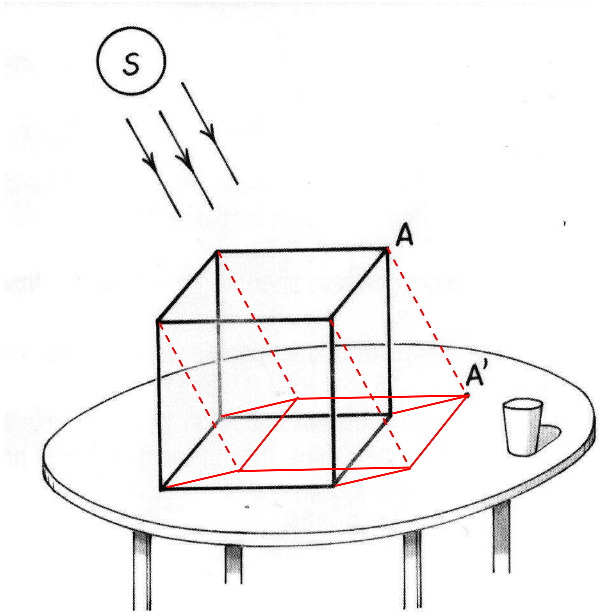
Soit r le rayon du cercle tracé. L'aire du petit carré vaut alors $(2r) \times r = 2r^2$. En effet, le segment pointillé représente la moitié d'une base d'un triangle de base $2r$ (diagonale du carré) et de hauteur r. Puisqu'il y a deux triangles isométriques dans ce carré respectant cette condition, il faut multiplier l'aire du triangle par 2 pour trouver celle du carré.



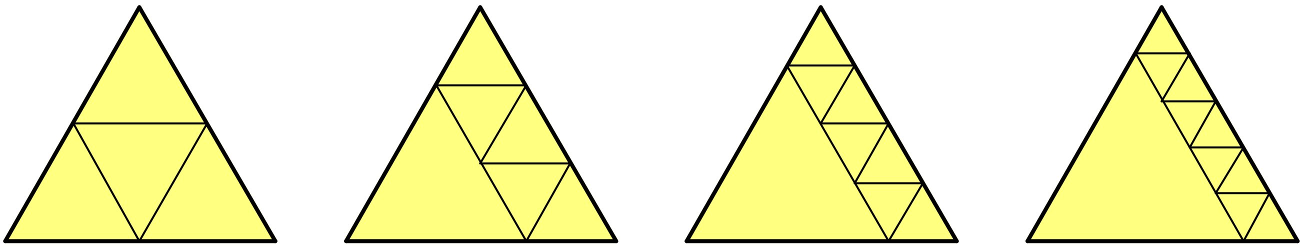
L'aire du grand carré est $4r^2$, puisque chaque côté du carré a une longueur égale à $2r$, deux fois le rayon du cercle.

On en déduit que l'aire du jardin intérieur est deux fois moins importante que celle du grand carré, donc les aires des jardin intérieur et de la galerie sont égale (puisque l'aire de la galerie est celle du grand carré moins celle du jardin intérieur).

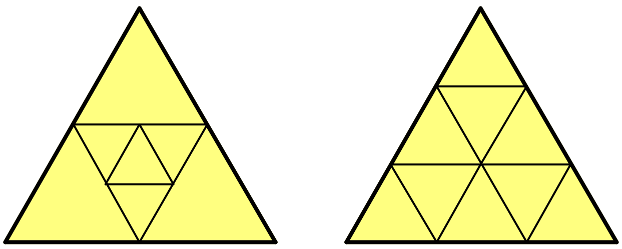
Exercice 4



Exercice 5



4 ↓ | 6 ↓ | 8 | 10

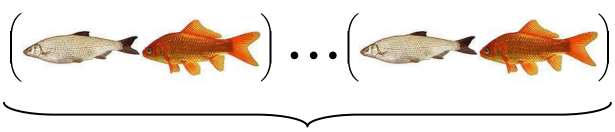


7 | 9

A partir du triangle équilatéral initial, on peut le diviser en 4 triangles équilatéraux minimum. Il faudrait ensuite trouver un moyen de diviser un triangle équilatéral en deux autres, ce qui est impossible. Autrement dit, à partir de la construction donnant 4 triangles équilatéraux, il est impossible de construire les 5 triangles équilatéraux.

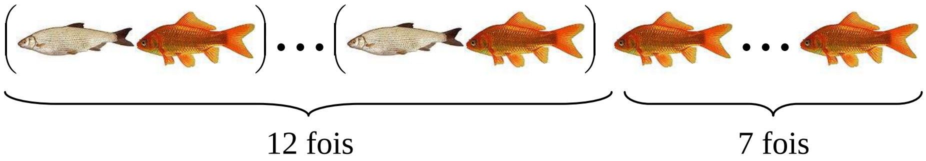
Exercice 6

Puisque 12 poissons rouges doivent avoir un poisson blanc immédiatement devant eux, on a déjà la série suivante :

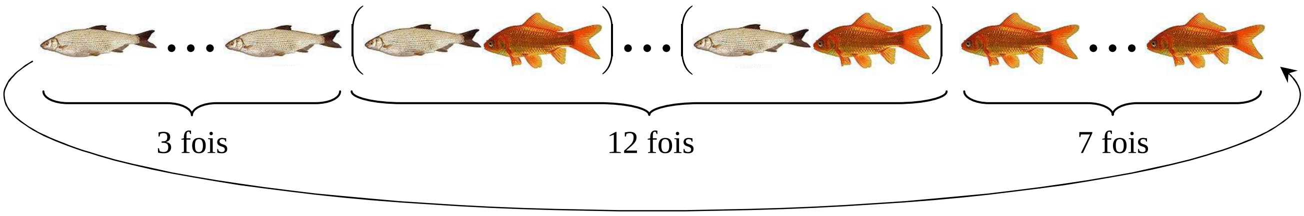


12 fois

On sait aussi que 7 poissons rouges ont un poisson rouge immédiatement devant eux. On peut insérer ces 7 poissons entre un blanc et un rouge de la série ci-dessus, les mettre tout au devant de la série ou encore tout à l'arrière de cette série (ces deux possibilités sont les mêmes, puisqu'ils tournent en rond). Supposons qu'on les mette à l'arrière.

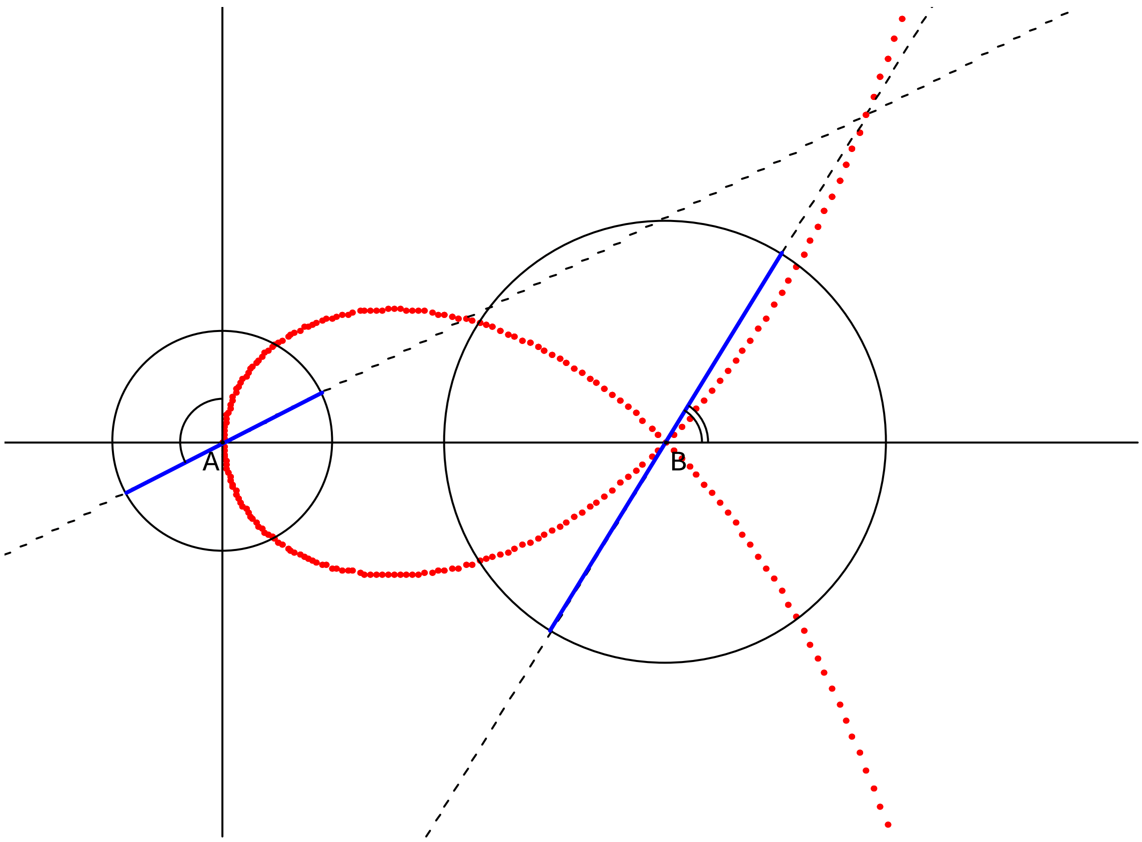


Enfin, on sait que 3 poissons blancs ont un poisson blanc immédiatement devant eux : il faut donc 4 poissons blancs qui se suivent. On peut eux aussi les intercaler entre un poisson rouge et un blanc, ou les mettre tout au début de la série ci-dessus (ce qui revient au même de les mettre tout à la fin). On obtient donc la série finale ci-dessous :



Pour toutes les permutations possibles, on sait qu'il y aura toujours un poisson blanc au « début » de la série, et un rouge à « la fin » : en tournant en rond, on aura donc un poisson rouge devant un blanc, ce qui n'entre pas dans les conditions spécifiées par l'énoncé. La série ci-dessus est donc représentative de toutes les conditions fixées, et on compte donc 34 poissons.

Exercice 7



Exercice 8

Supposons que le pentagone étoilé soit régulier. Soit O le centre de ce pentagone étoilé. Alors tous les angles au centre ($\widehat{IOJ}$, $\widehat{JOL}$, $\widehat{LOM}$, $\widehat{MOK}$ et $\widehat{KOI}$) ont la même mesure, égale à 360/5 = 72°. Par conséquent, les angles à la base de chaque triangle isocèle formé (IOJ, JOL, LOM, MOK, KOI) sont tous égaux, et mesurent $\frac{180-72}{2} = 54°$, et on en déduit que chaque angle du pentagone IJLMK ($\widehat{MIJ}$, $\widehat{IJL}$, $\widehat{JLM}$, $\widehat{LMK}$ et $\widehat{MKI}$ mesurent $2 \times 54 = 108°$. Par suite, $\widehat{AIK} = 180 - 108 = 72°$, et donc $\widehat{DIJ} = 72°$, car ces deux angles sont opposés par le sommet. De même, $\widehat{DJI} = 72°$.

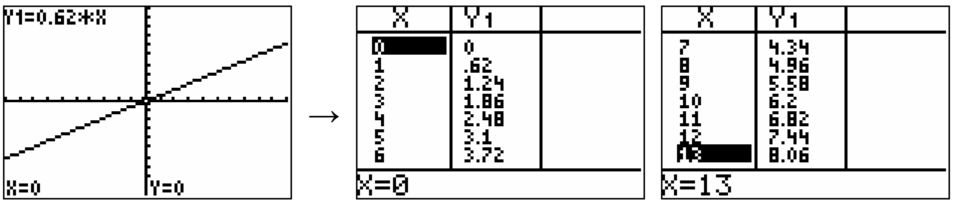
Soit H le milieu de [IJ] : c'est donc le pied de la hauteur issue de D dans le triangle isocèle DIJ. Le triangle DIH est alors rectangle en H, et d'après les règles de trigonométrie, on a

$$\cos(72°) = \frac{a \div 2}{b} = \frac{a}{2b}.$$

Ceci est équivalent à $a \simeq 0{,}62b$. On sait que le pentagone étoilé doit être dessiné en entier sur la feuille, donc on doit avoir l'inéquation $a + 2b \leqslant 21$. On la résout :

$$a + 2b \leqslant 21 \iff 2{,}62\, b \leqslant 21 \iff b \leqslant \frac{21}{2{,}62} \iff b \leqslant 8{,}015 \iff b \leqslant 8.$$

On trace donc la courbe d'équation $y = 0{,}62x$ dans la calculatrice, puis on affiche la table pour des valeurs de x entières comprises entre 1 et 8 (le X de la calculatrice est notre b sur le papier) :



Nous regardons alors les valeurs de Y1 (donc de a) qui soient les plus proches d'un nombre entier. Le couple (8 ; 4,96) convient. Nous choisirons donc pour valeurs $a = 5$ et $b = 8$. La figure correspondante se trouve sur la dernière page.

Exercice 9

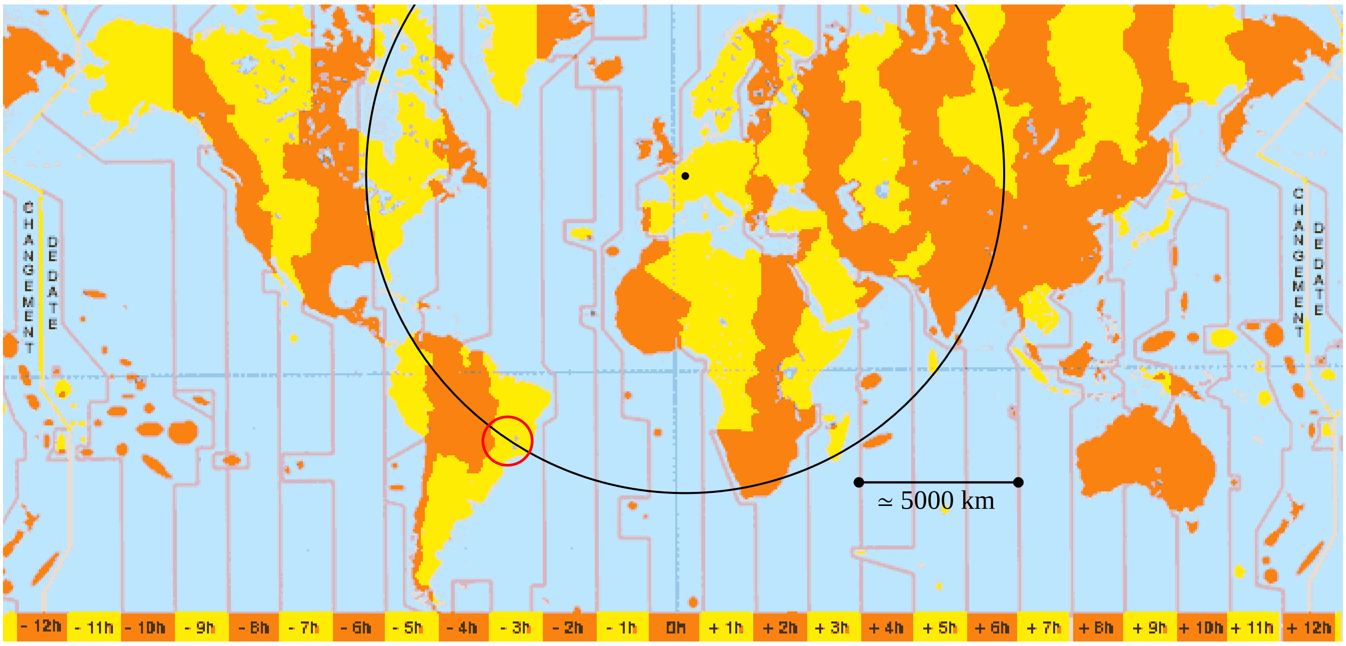
Soit d le décalage horaire. D'après les données de l'énoncé, la durée du voyage « aller » a été de 7h30 et celle du « retour » 11h30. Les durées réelles correspondantes sont donc de $7{,}5 + d$ et $15{,}5 - d$ ($+ d$ et $- d$ n'ont pas d'importance, on aurait pu les échanger, mais l'alternance de signe est importante car Michel fait le trajet aller-retour donc une fois dans le sens du décalage, et l'autre dans le sens inverse du décalage !!).

On suppose donc que la durée du voyage est la même à l'aller qu'au retour. On a donc à résoudre l'équation $7{,}5 + d = 15{,}5 - d$, qui donne $d = 4$.

Il faut maintenant déterminer dans quel sens est parti Michel. La durée réelle du trajet est de 11h30, ce qui fait que Michel est arrivé à destination (à l'aller) à 10h45 (heure de Paris) et 6h45 (heure locale). Michel est donc parti vers l'Ouest (où l'heure « recule »…). Sachant que l'heure de Paris est « GMT + 1 », on sait que Michel se trouve dans une zone « GMT – 3 ».

De plus, on sait que l'avion vole à 900 km/h, et sachant que la durée réelle du voyage à été de 11,5 heures, on sait que Michel a parcouru $11{,}5 \times 900 = 10.350$ km de Paris.

Sachant que Michel se trouve dans une zone « GMT – 3 » et est situé à 10.350 km de Paris, on peut le localiser plus précisément grâce à la carte incluant une échelle :



On trace un cercle de centre Paris et de rayon 10.350 km environ, et l'intersection de ce cercle avec la bande « GMT + 3 » est solution du problème posé. Michel se trouve donc dans l'arc de cercle noir se trouvant dans le cercle rouge sur la figure (donc au Brésil).

Exercice 10

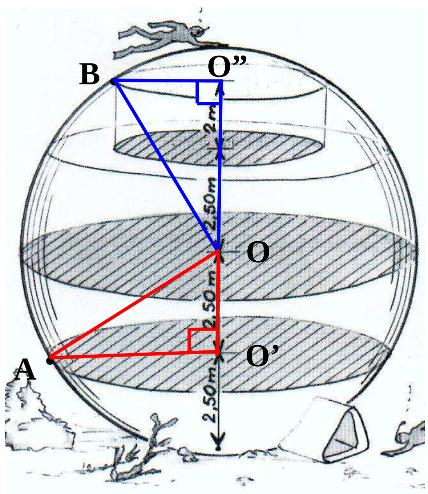
Il s'agit de calculer la surface correspondant aux zones grisées sur la figure. Notons $\mathcal{A}_1$ celle du bas, $\mathcal{A}_2$ celle du milieu et $\mathcal{A}_3$ celle du haut.

Commençons par $\mathcal{A}_2$: Cette surface étant un disque, son aire est égale à $\pi\, r_2^2$, en notant r^2 le rayon de ce disque. Or $r_2 = 5$ puisque le « bâtiment » est une sphère, donc $\mathcal{A}_2 = \pi \times 5^2 = 25\pi$.

Continuons avec $\mathcal{A}_1$: La difficulté ici est de calculer le rayon r_1 du disque correspondant à la surface $\mathcal{A}_1$. Soient O' le centre de ce disque, O le centre de la sphère et A un point appartenant à la fois au disque et à la sphère (donc un point de la bordure de la sphère). Alors le triangle OO'A est rectangle en O', et sachant que OO' = 2,5 et OA = 5 (car le rayon de la sphère est 5m), on peut déterminer O'A grâce au théorème de Pythagore :

$$\text{O'A} = \sqrt{\text{OA}^2 - \text{OO'}^2} = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{25 - 6{,}25} = \sqrt{18{,}75}.$$

D'où $\mathcal{A}_1 = 18{,}75\ \pi$.



Terminons avec $\mathcal{A}_3$: Soient O” le point situé 2m au dessus du centre du disque correspondant à $\mathcal{A}_3$ et B un point appartenant à fois à la sphère et au plafond du dernier étage (donc un point situé 2m au-dessus du disque) (voir figure page suivante). Alors le triangle OO”B est rectangle en O”, ce qui nous permet grâce au théorème de Pythagore de calculer le rayon r_3 = O”B du disque :

$$O''B = \sqrt{OB^2 - OO''^2} = \sqrt{5^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{25 - 20{,}25} = \sqrt{4{,}75}.$$

D’où $\mathscr{A}_3 = 4{,}75\,\pi$.

Au final, on en déduit que la surface $\mathscr{A}$ habitable vaut :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 = \pi\,(25 + 18{,}75 + 4{,}75) = 48{,}5\,\pi \simeq 152{,}37 \text{ m}^2.$$

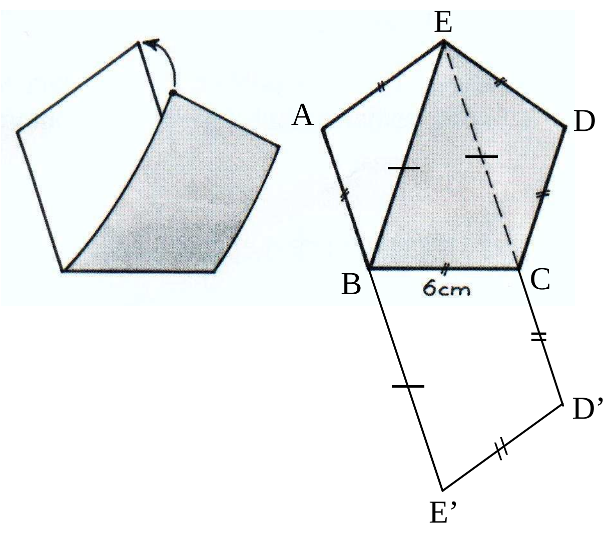
Exercice 11

Numérotons les étages en partant du haut. Ainsi, on constate que les numéros des appartements les plus à droite d’un étage sont égaux au carré du numéro d’étage (les appartements 1, 4, 9, etc seront donc les plus à droite des étages 1, 2, 3, etc). Or $44 \leqslant \sqrt{2007} \leqslant 45$. On aura donc la structure suivante à partir de l’étage 43 :

											étage
…	…	…	…	…	…	…	…	1849 = 43^2			**43**
…	1919	1920	1921	…	1932	1933	1934	1935	1936 = 44^2		**44**
…	2007	2008	2009	…	2020	2021	2022	2023	2024	2025 = 45^2	**45**

On a juste indiqué le numéro du dernier appartement du 43ᵉ étage pour être sur que l’appartement au-dessus de celui portant le numéro 2007 existe !! Le bruyant voisin habite donc l’appartement n° 1919.

Exercice 12



Nature du quadrilatère : Par symétrie, BE = BE’ = CE et CD = CD’. On en déduit que AE’ = AB + BE’ = CD’ + EC = CD. De plus, D’E’ = DE par symétrie, et donc D’E’ = AE’. Finalement, le quadrilatère AE’D’E est un parallélogramme.

Angles : Comme nous l’avons déjà calculé dans l’exercice 8, on sait que tous les angles du pentagone valent 108°. Donc $\widehat{A} = \widehat{D'} = 108°$. La somme des angles d’un quadrilatère étant égale à 360°, on en déduit que :

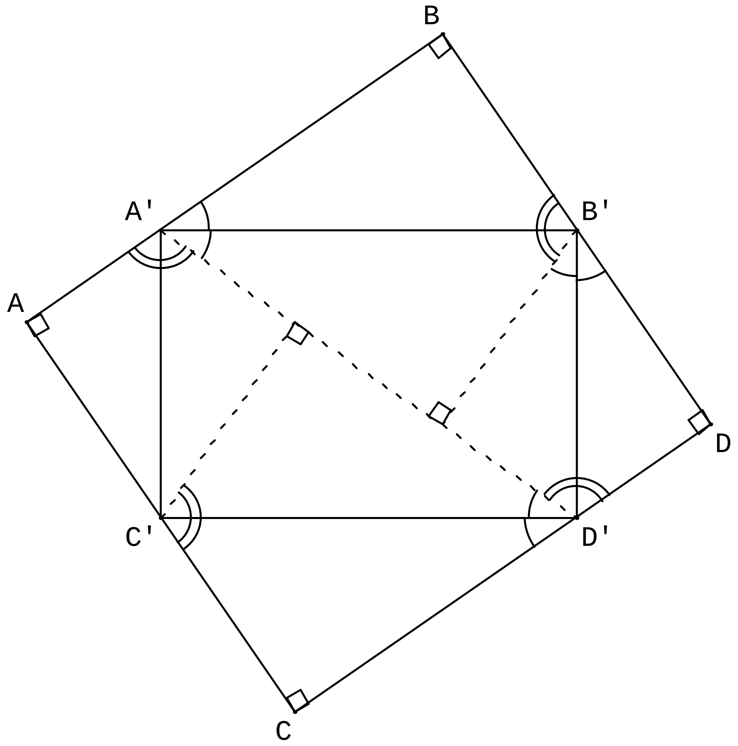
$$\widehat{AEC} = \widehat{E'} = \frac{360 - 2 \times 108}{2} = 180 - 58 = 72°.$$

Dimensions : On sait déjà que AE = D’E’ = 6 cm. Il ne reste plus qu’à calculer EC. Soit H le pied de la hauteur issu de E dans le triangle isocèle BEC. Soit H le milieu de [BC]. Comme BEC est isocèle, (EH) est une hauteur de BEC, donc le triangle EHC est rectangle en H. De plus, $\widehat{ECH} = \widehat{DCH} - \widehat{DCE} = 108 - 36 = 72°$ ($\widehat{DCE} = 36°$ grâce au théorème de l’angle au centre). On a donc :

$$\cos(72°) = \frac{HC}{EC} = \frac{3}{EC} \Leftrightarrow EC = \frac{3}{\cos(72°)} \simeq 9{,}71 \text{ cm}.$$

Finalement, AE = D’E’ = 6 cm et AE’ = ED’ = 6 + 9,71 = 15,71 cm.

Exercice 13



Comme il ne doit y avoir ni chevauchement du papier, ni espaces vides, il faut absolument que les segments [A'B] et [CD'] se replient sur la diagonale. On aura donc $\widehat{BA'B'} = \widehat{B'A'D'} = \widehat{A'D'C'} = \widehat{C'D'C}$.

Les triangles A'BB', D'CC' et les deux plus grands triangles dans la photo sont donc isométriques, et on en tire que AB = A'A + A'B = A'D' = $\sqrt{13^2 + 9^2} \simeq 15{,}81$ cm.

De plus, le papier devant recouvrir entièrement la photo (sans chevauchement ni espaces vides) devant et derrière, son aire doit être égal à deux fois celle de la photo. Par suite :

$$BD\sqrt{13^2 + 9^2} = 2 \times (13 \times 9) \Leftrightarrow BD = \frac{234}{\sqrt{250}} \simeq 14{,}80 \text{ cm.}$$

Figure de l'exercice 8