

CAPES 2006

Deuxième composition

1 Etude de la quadrique \mathcal{Q} et de la conique \mathcal{C}

1.1 Intersections de \mathcal{Q} avec une famille de plans

On pose $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \vec{k}$.

- a) Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant déjà orthogonaux et unitaires, il suffit de calculer le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour obtenir un troisième vecteur \vec{w} de sorte que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de E . Il vient que

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Définissons la matrice $P_{\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_1}$ de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$P_{\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors, en reprenant les notations de l'énoncé, que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_{\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + z_1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - z_1) \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors l'équation de \mathcal{Q} dans le repère \mathcal{R}_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x_1 + z_1)^2 - \frac{3}{2}(x_1 + z_1)(x_1 - z_1) + \frac{1}{2}(x_1 - z_1)^2 + z_1\sqrt{2} - \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 = 0 \\ \Leftrightarrow & -\frac{x_1^2}{2} - \frac{y_1^2}{2} + \frac{5z_1^2}{2} + \frac{\sqrt{10}}{5}y_1 + z_1\sqrt{2} = 0 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + y_1^2 - 5z_1^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2z_1\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

- c) Soient $t \in \mathbb{R}$ et \mathcal{P}_t le plan d'équation $z_1 = t$. \mathcal{P}_t est un plan parallèle à l'axe (O, \vec{k}) , et ses deux points d'intersection avec les deux autres axes du repère \mathcal{R}_0 sont à égale distance de l'origine O (on remarquera que le produit de l'ordonnée du point d'intersection de \mathcal{P}_t avec l'axe des ordonnées et de l'abscisse du point d'intersection de ce plan avec l'axe des abscisses est négatif).

L'intersection de \mathcal{P}_t et \mathcal{Q} se traduit par l'égalité suivante :

$$x_1^2 + y_1^2 - 5t^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5}y_1 - 2t\sqrt{2} = 0,$$

qui est équivalente à

$$x_1^2 + \left(y_1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \right)^2 = 5t^2 + 2t\sqrt{2} + \frac{2}{5}.$$

Le membre de droite de cette équation est un trinôme du second degré dont le discriminant est nul, ce qui traduit que ce trinôme est positif pour toute valeur de t . On reconnaît ainsi l'équation d'un cercle de centre $C_t \left(0, \sqrt{10}/5, t \right)_{\mathcal{R}}$ et de rayon $R_t = \sqrt{5t^2 + 2t\sqrt{2} + \frac{2}{5}}$.

- d) La valeur de t pour laquelle le cercle précédent se réduit à un point est $t = -\sqrt{2}/5$. C'est la racine de multiplicité 2 du membre de droite de l'égalité ci-dessus. Le cercle est alors confondu avec son centre $S \left(0, \sqrt{10}/5, -\sqrt{2}/5 \right)_{\mathcal{R}}$. Ses coordonnées dans le repère \mathcal{R}_0 sont donc :

$$P_{\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{10}/5 \\ -\sqrt{2}/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 1/5 \\ \sqrt{10}/5 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond au résultat annoncé.

1.2 Nature de \mathcal{Q} et de \mathcal{C}

- a) Tout point $M(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}_1} = M(X, Y, Z)_{\mathcal{R}}$ vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = X \\ y_1 = Y + \sqrt{10}/5 \\ z_1 = Z - \sqrt{2}/5 \end{cases}.$$

L'équation de \mathcal{Q} s'écrit alors dans le repère \mathcal{R} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X^2 + \left(Y + \sqrt{10}/5 \right)^2 - 5 \left(Z - \sqrt{2}/5 \right)^2 - \frac{2\sqrt{10}}{5} \left(Y + \sqrt{10}/5 \right) - 2\sqrt{2} \left(Z - \sqrt{2}/5 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 - 5Z^2 &= 0. \end{aligned}$$

- b) La quadrique \mathcal{Q} est de type hyperboloïde. Remarquons que si X, Y ou Z vaut 0 (on ne s'intéresse donc qu'à l'intersection de la quadrique avec un plan formé de deux vecteurs du repère \mathcal{R}), la restriction de \mathcal{Q} au plan considéré donne une réunion de deux droites sécantes en l'origine S , ce qui nous permet d'affirmer que \mathcal{Q} est un cône de révolution. Son axe contient donc le point S , et est dirigé par le troisième vecteur du repère \mathcal{R} . Autrement dit, l'axe de la quadrique \mathcal{Q} est la droite définie par

$$\begin{cases} z = \sqrt{10}/5 \\ y = -x. \end{cases}$$

- c) L'équivalence se déduit des questions précédentes :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow z = 0 \\ &\stackrel{1.1.b)}{\Leftrightarrow} y_1 = 0 \\ &\stackrel{1.2.a)}{\Leftrightarrow} Y + \frac{\sqrt{10}}{5} = 0. \end{aligned}$$

La figure se trouve en annexe A.2.

- d) On constate que la quadrique \mathcal{Q} est symétrique par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées du repère \mathcal{R} . Nous ne nous intéresserons donc qu'au cercle dont le centre voit sa troisième coordonnée positive. Pour tout point $M(0,0,Z)_{\mathcal{R}}$ (avec $Z \geq 0$) est donc à égale distance des droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Remarquons que la distance d'un tel point aux deux droites constitue une bijection de \mathbb{R}_+ (la coordonnée Z positive) vers \mathbb{R}_+ (la distance considérée).

La droite \mathcal{D} étant l'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' , elle est parallèle à l'axe (S, \vec{w}) et à distance fixe de celui-ci, à savoir $\sqrt{10}/5$. On note ρ cette quantité. Puisque $\rho > 0$, il existe un unique $Z_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que la distance du point $\Omega_1(0,0,Z_0)_{\mathcal{R}}$ aux deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 soit égale à ρ .

Le second cercle admet donc ρ comme rayon et le point $\Omega_2(0,0,-Z_0)_{\mathcal{R}}$ comme centre.

- e) On ne s'intéressera qu'à la sphère de centre Ω_1 , l'autre cas se démontrant par symétrie. Le plan \mathcal{P} étant parallèle à l'axe (S, \vec{w}) , le minimum de la distance de l'axe au plan est réalisée pour tout point de la projection orthogonale de l'axe sur le plan, c'est-à-dire \mathcal{D} . Mais cette distance est égale à ρ d'après la question précédente, donc la sphère de centre Ω_1 et de rayon ρ est bien tangente au plan \mathcal{P} en un point que l'on note F_1 .

Quant à la quadrique, ayant constaté que c'est un cône de révolution, et que la sphère est aussi une surface de révolution de même axe, il suffit de faire « tourner » la figure plane de la question c autour de l'axe (S, \vec{w}) de révolution pour en déduire que la sphère est tangente à \mathcal{Q} le long d'un cercle que l'on note \mathcal{C}_1 .

1.3 Deux caractérisations de \mathcal{C}

- a) Soit M un point quelconque de \mathcal{C} . En particulier, $M \in \mathcal{Q}$, de sorte que les points M, S et Ω_1 soient coplanaires avec S et Ω_1 sur l'axe de révolution de \mathcal{Q} . Puisque $S \in \mathcal{D}$, on en déduit alors que la droite (MS) est incluse dans la quadrique \mathcal{Q} . Une figure illustrant cette question se trouve à la fin de celle-ci...

Le but est de montrer que les triangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ sont isométriques. Soit $i \in \{1, 2\}$. Remarquons tout d'abord que $T_i \in \mathcal{C}_i$ implique que $\Omega_i T_i = \rho$. Cette distance est aussi égale à $\Omega_i F_i$. De plus, les triangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ possèdent un côté commun. Enfin, puisque $M \in \mathcal{P}$ et que F_i est le projeté orthogonal de Ω_i sur \mathcal{P} , il vient que l'angle $\widehat{MF_i\Omega_i}$ est droit. On a vu en 1.1.e que la sphère de centre Ω_i et de rayon ρ était tangente à la quadrique \mathcal{Q} au cercle \mathcal{C}_i en un point que l'on a noté T_i , d'où l'orthogonalité des droites (MT_i) et $(T_i\Omega_i)$. Au final, nous sommes en présence de deux triangles rectangles $MF_i\Omega_i$ et $MT_i\Omega_i$ qui possèdent la même hypoténuse et un autre côté de même longueur : ils sont isométriques, et on a donc $MT_i = MF_i$.

Supposons que la troisième coordonnée de M dans le repère \mathcal{R} soit positive. Alors $MT_1 < MT_2$, et donc $MT_2 = MT_1 + T_1 T_2$, de sorte que $|MT_1 - MT_2| = MT_2 - MT_1 = MT_1 + T_1 T_2 - MT_1 = T_1 T_2$. Supposons-la alors négative, auquel cas $MT_2 < MT_1$, et donc $MT_1 = MT_2 + T_1 T_2$, ce qui implique que $|MT_1 - MT_2| = MT_1 - MT_2 = MT_2 + T_1 T_2 - MT_2 = T_1 T_2$. Notons tout de même que le plan \mathcal{P} est fixé de telle sorte que M ne puisse pas appartenir au segment $[T_1, T_2]$, auquel cas l'égalité aurait été fautive.

On retrouve ainsi la propriété suivante : ?

de la position du point M , et lorsque M parcourt \mathcal{C} , T_i parcourt \mathcal{C}_1 qui est fixe.

On retrouve ainsi la propriété suivante : ?

2 Résolution de l'équation diophantienne pour n assez petit

On rappelle l'équation à résoudre :

$$\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p}. \quad (\Sigma_1)$$

2.1 Une étude élémentaire

- a) Pour que les coefficients binomiaux aient du sens, il faut que $n-1 \geq p$, c'est-à-dire $n \geq p+1$ (ce qui implique aussi que $n \geq p-1$). De plus, $p-1$ doit être positif, ce qui nous amène à écrire que $p+1 \geq 2$. On obtient donc la double inégalité suivante :

$$2 \leq p+1 \leq n.$$

Supposons alors cette première condition réalisée. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} &\Leftrightarrow \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{(n-p+1)(n-p)} = \frac{1}{p} \\ &\Leftrightarrow np = (n-p+1)(n-p) \\ &\Leftrightarrow n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{aligned}$$

Au final, on a bien montré que :

$$\binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p} \iff \begin{cases} 2 \leq p+1 \leq n \\ n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{cases}$$

La première double-inégalité est vérifiée pour tout entier $n \geq 2$, alors que la seconde ne l'est pour aucune valeur strictement positive de n .

- b) Ce polynôme peut se réécrire sous la forme $X^2 - (3n+1)X + n(n+1)$. Son discriminant vaut alors $\Delta_n = (3n+1)^2 - 4n(n+1) = 5n^2 + 2n + 1$, et on constate qu'il est strictement positif puisque $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que ce polynôme possède deux racines réelles distinctes. Posons alors, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = 3n+1$ et $b_n = \Delta_n = 5n^2 + 2n + 1$. Une récurrence immédiate montre que ces suites sont bien à valeurs dans \mathbb{N} (plus précisément \mathbb{N}^*). Ainsi

$$X_1 = \frac{a_n - \sqrt{b_n}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{a_n + \sqrt{b_n}}{2}.$$

- c) Soit b un entier naturel. Le sens indirect est trivial, puisque la définition de b étant un carré parfait impose à \sqrt{b} d'être entier, donc rationnel. Montrons alors le sens direct par contraposée : supposons que b ne soit pas un carré parfait, c'est-à-dire que $\sqrt{b} \notin \mathbb{N}$, et montrons que \sqrt{b} n'est pas non plus rationnel. Supposons un instant que \sqrt{b} le soit. Alors il existerait deux entiers naturels A et B (B non nul) tels que $\sqrt{b} = A/B$. Cette quantité n'étant pas entière, B ne divise pas A , donc B^2 ne divise pas A^2 . Il vient que $b = A^2/B^2$ n'est pas entier, ce qui est une contradiction. Donc \sqrt{b} n'est pas rationnel.

- d) Supposons que (n, p) est une solution de (Σ_1) . D'après ce qui précède, pour $n \geq 2$, p est solution du polynôme de la question 2.1.a. Plus précisément,

$$p = \frac{a_n - \sqrt{b_n}}{2} \Leftrightarrow a_n - 2p = \sqrt{b_n}.$$

En effet, si p était égal à X_2 , cela contredirait la condition $2 \leq p+1 \leq n$, d'après cette même question 2.1.a. Or a_n est entier (toujours 2.1.a) et $2p$ l'est aussi, ce qui impose à $\sqrt{b_n}$ d'être entier, et il suffit alors d'appliquer 2.1.b pour en déduire que $b_n = 5n^2 + 2n + 1$ est un carré parfait.

e)

- f) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$. L'idée de l'algorithme serait de faire varier n de 1 à n_0 , vérifier à chaque étape si $5n^2 + 2n + 1$ est un carré parfait, et si tel est le cas, alors le calcul de $(3n + 1 - \sqrt{5n^2 + 2n + 1})/2$ donne l'autre entier p recherché. Résumons cela (E désigne la fonction « partie entière ») :

```

pour n allant de 1 à n0 faire :
  si  $\sqrt{5n^2 + 2n + 1} - E(\sqrt{5n^2 + 2n + 1}) < 10^{-5}$  alors
     $(3n + 1 - \sqrt{5n^2 + 2n + 1})/2 \rightarrow p$ 
    affiche p
  fin du si
fin boucle.

```

2.2 Une méthode plus arithmétique

On se donne maintenant un couple (n, p) solution de Σ_1 .

- a) Supposons que n et p soient premiers entre eux. Puisque ces deux entiers sont solutions de Σ_1 , ils vérifient en particulier la seconde égalité du système établi à la question 2.1.a :

$$n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0 \Leftrightarrow np = n^2 - n(p-1) - pn + p(p-1) \Leftrightarrow np = (n-p)(n-(p-1)).$$

On poursuit encore un peu plus loin ce raisonnement :

$$np = (n-p)(n-(p-1)) \Leftrightarrow n(p-n+(p-1)+p) = p(p-1) \Leftrightarrow n(3p-n-1) = p(p-1).$$

Il découle de cette égalité que n divise le produit $p(p-1)$, et puisque n et p sont premiers entre eux, le théorème de Gauss nous permet de conclure que n divise $p-1$.

Ceci constitue une contradiction dans le sens où (n, p) est solution de Σ_1 implique en particulier que $n > p-1$, donc il n'existe pas de couples solutions de Σ_1 formés d'entiers premiers entre eux.

- b) • On utilise l'égalité de la question précédente (où l'hypothèse de primalité n'a pas été utilisée pour la montrer) :

$$r^2uv = r(u-v)(n-p-1) \Leftrightarrow ruv = (u-v)(n-p-1).$$

On en déduit que r divise le produit $(u-v)(n-p-1)$. Or $n-p-1 = r(u-v) - 1 = r(u-v-1) + (r-1)$, et $r-1 < r$. On poursuit ainsi l'algorithme d'Euclide : si $r > 2$, $r = (r-1) + 1$ avec $1 < r-1$, et la dernière étape nous assure alors que les entiers $n-p-1$ et r sont premiers entre eux, et si $r = 2$, alors $2 = 1 \cdot 2 + 0$, et l'on arrive à la même conclusion : les entiers $n-p-1$ et r sont premiers. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Gauss pour conclure que r divise $u-v$.

-
-
-

c) Implémentons l'algorithme vu en 2.1.f dans la calculatrice. Celle-ci nous donne alors les couples solutions suivants, pour $n \leq 105$:

$$(2, 1), \quad (15, 6) \quad \text{et} \quad (104, 40).$$

3 Un groupe de transformations affine conservant \mathcal{C}

3.1 Définition d'un nouveau repère \mathcal{R}_1 associé à la conique \mathcal{C}

a) Soit $I(-1/5, 1/5)_{\mathcal{R}_0}$, et posons $x_1 = x + 1/5$ et $y_1 = y - 1/5$. L'équation de la conique \mathcal{C} dans le repère (I, \vec{i}, \vec{j}) est donnée par

$$\begin{aligned} & \left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 - 3\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)\left(y_1 + \frac{1}{5}\right) + \left(y_1 + \frac{1}{5}\right)^2 + x_1 - \frac{1}{5} - \left(y_1 + \frac{1}{5}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 - \frac{1}{5} = 0. \end{aligned}$$

b) Remarquons que $a^2 + b^2 - 3ab = b^2 - (3a)b + (a^2)$. Cette quantité est donc un trinôme du second degré d'inconnue b , dont le discriminant vaut $5a^2 \geq 0$, et admet donc deux solutions réelles, ce qui nous permet de le factoriser et obtenir finalement :

$$a^2 + b^2 - 3ab = \left(b - a\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(b - a\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right).$$

- c)
d)

3.2 Transformations affines conservant \mathcal{C}

a)
b) On constate que G_1 est non vide car Id est bien une bijection de \mathcal{P} sur lui-même tel que $\text{Id}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Soient alors g et h deux éléments de G_1 . Alors

$$(g \circ h^{-1})(\mathcal{C}) = g(h^{-1}(\mathcal{C})) = g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

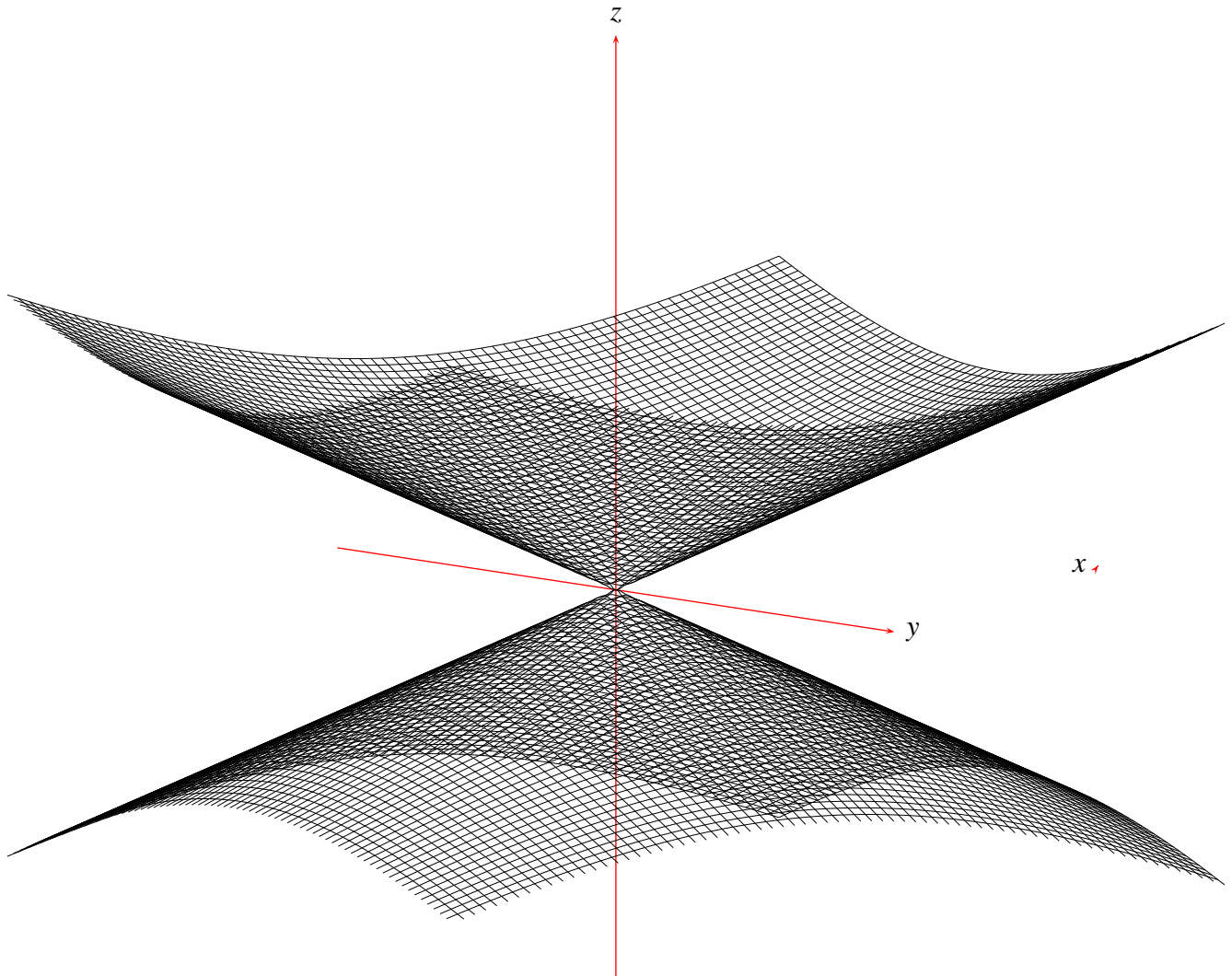
L'avant-dernière égalité se déduit de la bijectivité de $h \in G_1$:

$$h(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Leftrightarrow h^{-1}(h(\mathcal{C})) = h^{-1}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C} = h^{-1}(\mathcal{C}).$$

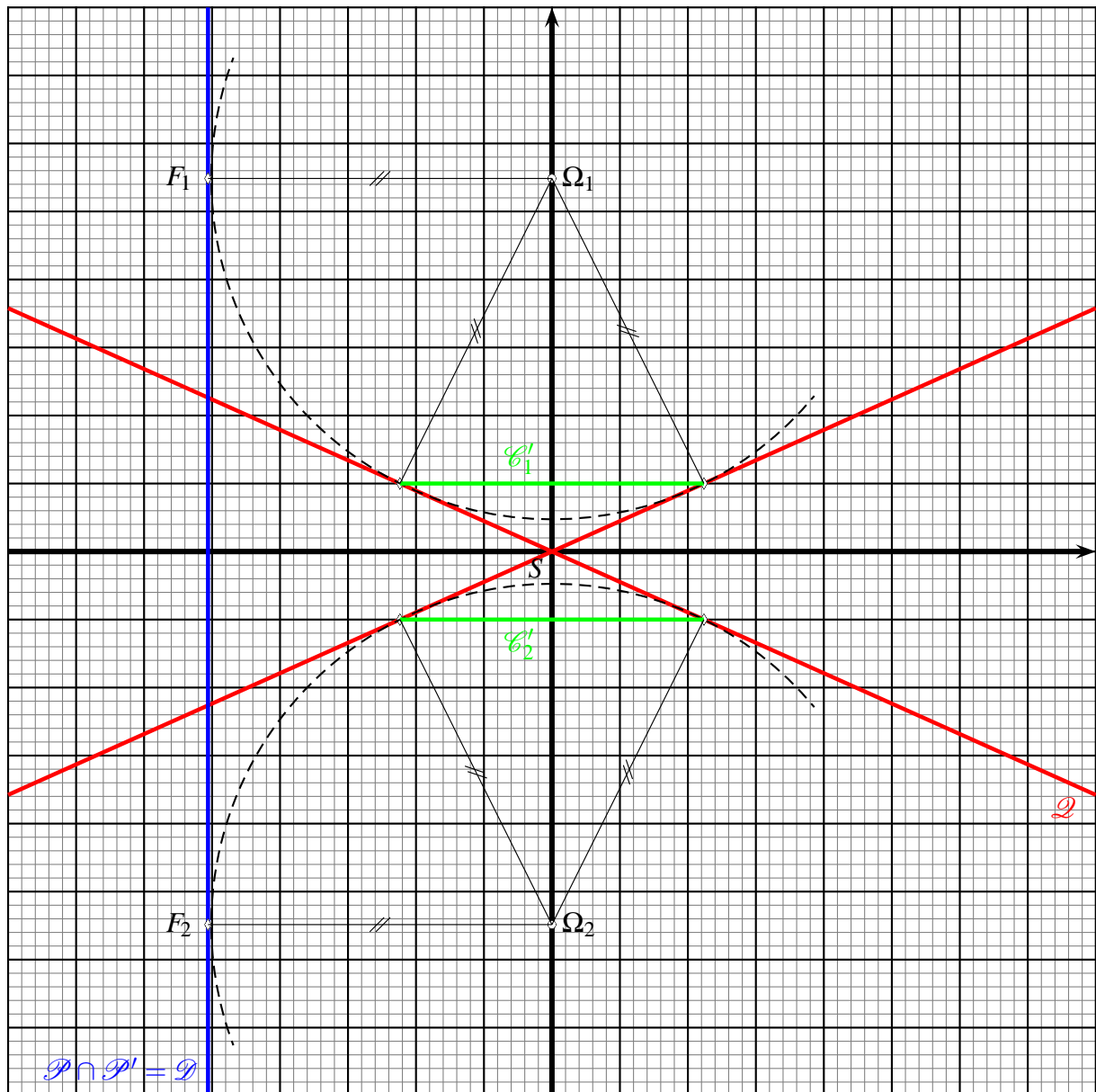
- c)
d)
e)
f)

A Figure de la partie 1

A.1 La quadrique \mathcal{Q} dans le repère \mathcal{R}



A.2 Figure demandée à la question 1.2.c



\mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}'_2 désignent respectivement les projetés des cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur le plan \mathcal{P}' .