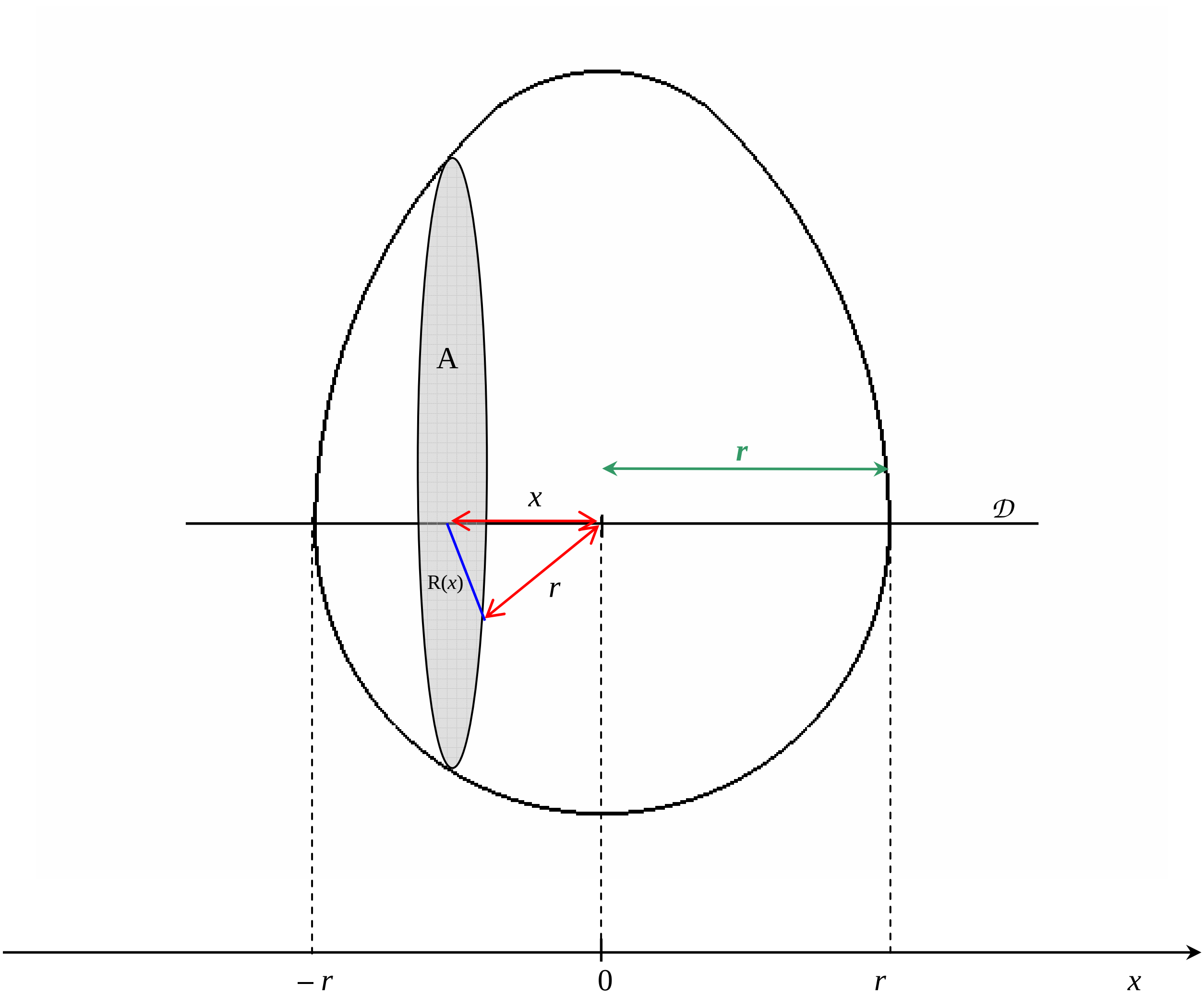
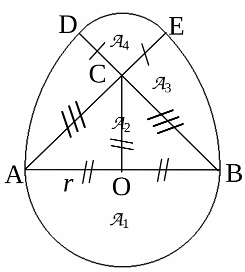
LE MYSTERE DE L'ŒUF



1) Calcul de l'aire $\mathcal{A}$



Posons $\mathcal{A}_5 := \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$. L'aire de l'oeuf vaut donc :
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + 2\mathcal{A}_5 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_4$. Or on a (O est le milieu de [AB]) :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\pi\,(AO)^2}{2}\ ;\ \mathcal{A}_5 = \frac{1}{8}\,\pi\,(AB)^2\ ;\ \mathcal{A}_2 = \frac{AB \cdot OC}{2}\ ;\ \mathcal{A}_4 = \frac{1}{4}\,\pi\,CD^2\ .$$

$$\boxed{\mathcal{A}_1 = \frac{\pi\, r^2}{2}}\ ;\ \boxed{\mathcal{A}_2 = \frac{1}{2}\,\pi\, r^2}\ ;\ \boxed{\mathcal{A}_3 = \frac{2r \cdot r}{2} = r^2}\ ;$$

$$\mathcal{A}_4 = \frac{1}{4}\,\pi\left(BD - \sqrt{BO^2 + OC^2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_4 = \frac{1}{4}\,\pi\left(2r - r\sqrt{2}\right)^2}$$

On en tire $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(r) = \dfrac{\pi\, r^2}{2} + \pi r^2 - r^2 + \dfrac{1}{4}\,\pi\left(2r - r\sqrt{2}\right)^2 = r^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi - 1\right) + \dfrac{1}{4}\,\pi\left(4r^2 - 4\sqrt{2}\, r^2 + 2r^2\right) =$

$$= r^2\left(\frac{3\pi}{2} - 1 + \pi - \pi\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}\right) = r^2\left(3\pi - \pi\sqrt{2} - 1\right)$$

$$\boxed{\mathcal{A}(r) = r^2\left(\pi\left(3 - \sqrt{2}\right) - 1\right)}$$

2) Calcul du volume $\mathcal{V}$

D'après le graphique sur le haut de la première page, on va intégrer toutes les aires (ou surfaces) de $-r$ à r, tout en faisant attention au fait que le « rayon » de l'œuf R est en fonction de l'abscisse considérée x, où $-r \leqslant x \leqslant r$.

On a donc :

$\mathcal{V}(r) = \int_{-r}^{r} \mathcal{A}(\mathrm{R}(x))\,\mathrm{d}x = 2\int_0^r \mathcal{A}(\mathrm{R}(x))\,\mathrm{d}x$ puisqu'un œuf est symétrique…

$= 2\int_0^r \mathcal{A}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)\mathrm{d}x$ en effet, d'après Pythagore, $x^2 + \mathrm{R}^2(x) = r^2$.

$$= 2\int_0^r (r^2-x^2)\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right)\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right)\int_0^r r^2-x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right)\left[xr^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right)\frac{2\,r^3}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{V}(r) = \frac{4\,r^3}{3}\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right)}$$

3) Application numérique

Soit par exemple un œuf de 5 cm de diamètre à sa base (c'est-à-dire selon la droite $\mathcal{D}$ du schéma de la première page). Il s'ensuit le calcul de l'aire et de volume :

$\mathcal{A}(2) = 2.5^2\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right) \approx$ **24.887 cm²** ; $\mathcal{V}(2) = \frac{4\,2.5^3}{3}\left(\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right) \approx$ **82.956 cm³**.

4) Graphique