Preuve de l'existence d'une solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boldsymbol{y' = y, \quad \text{avec } y(0) = 1.} \tag{1}$$

. . . .

Rappelons tout d'abord les inégalités de Bernoulli, bien utiles ici…

(i) $\forall\, X > -1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ (1+X)^n \geqslant 1 + nX\,;$ $\quad (B_1)$

(ii) $\forall\, X < 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ (1-X)^n \geqslant 1 - nX.$ $\quad (B_2)$

Soit x un réel fixé. Soient $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ les suites de fonctions définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Montrons que $(u_n(x))$ est croissante à partir d'un certain rang :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1}.$$

On note qu'on a utilisé la décomposition

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Supposons alors $n > |x|$, de sorte que $1 + \dfrac{x}{n}$ ne s'annule pas.

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x}{(n+1)(n+x)} = 0, \quad \exists\, N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N_1,\ \ \frac{x}{(n+1)(n+x)} < 1.$

On peut alors appliquer l'inégalité de Bernoulli (B_2) avec $X = \dfrac{x}{(n+1)(n+x)}$, et on trouve alors que pour tout $n \geqslant \max(|x|, N_1)$,

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1 - \frac{x}{n+x} \\ \Rightarrow\ \ & u_{n+1}(x) \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+x}\right) \\ \Rightarrow\ \ & u_{n+1}(x) \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\right) \\ \Rightarrow\ \ & u_{n+1}(x) \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = u_n(x). \end{aligned}$$

Montrons que $(v_n(x))$ est décroissante à partir d'un certain rang :

On suppose toujours $n > |x|$ de sorte que $u_n(x)$ ne s'annule pas. On constate alors que

$$v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)},$$

ce qui permet immédiatement de conclure.

Montrons que la suite $(v_n(x) - u_n(x))$ converge vers 0 :

On suppose toujours et encore $n > |x|$ pour que $(v_n(x))$ ne s'annule pas. On a :

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Puisque $n > |x|$, $x^2/n^2 < 1$, ce qui nous permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli (B_2) afin d'obtenir

$$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - \frac{x^2}{n},$$

d'où l'encadrement pour tout $n > |x|$,

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1 \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant 1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant \frac{x^2}{n}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n}\, v_n(x).$$

La suite $(v_n(x))$ étant décroissante à partir d'un certain rang, elle est majorée par un réel que l'on note M, et il s'en suit que

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} M.$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure : $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.

Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite, dépendante de x, que l'on note $\ell(x)$. Il faut encore montrer que ℓ est solution de (1).

Notons d'emblée que tout entier n vérifie $u_n(0) = 1$. Par passage à la limite, on obtient directement que $\ell(0) = 1$.

Montrons que ℓ et dérivable et que $\ell' = \ell$:

On suppose toujours encore que $n > |x|$ et on se donne un réel h non nul. Alors

$$u_n(x+h) = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{n\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^n = u_n(x)\ \left(1 + \frac{h}{n+x}\right)^n.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{h}{n+x} = 0$,

$$\exists\ N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall\ n \geqslant N_2, \quad \left|\frac{h}{(n+x)}\right| < 1.$$

En particulier, on a que $h/(n+x) > -1$, et on peut alors appliquer l'inégalité de Bernoulli (B_1). On trouve alors que pour tout entier $n \geqslant \max(|x|, N_2)$,

$$\begin{aligned}
& \left(1+\frac{h}{n+x}\right)^n \geqslant 1+\frac{nh}{n+x} \\
\Rightarrow\quad & u_n(x+h) \geqslant u_n(x)\left(1+\frac{nh}{n+x}\right) \\
\Rightarrow\quad & \ell(x+h) \geqslant \ell(x)\ (1+h) \qquad\qquad \text{par passage à la limite} \\
\Rightarrow\quad & \ell(x+h)-\ell(x) \geqslant \ell(x)\ h. \qquad (2)
\end{aligned}$$

On remplace alors h par $-h$ dans la dernière inégalité, ce qui donne

$$\ell(x-h)-\ell(x) \geqslant -\ell(x)\ h.$$

On remplace cette fois-ci x par $x+h$ pour trouver

$$\begin{aligned}
& \ell(x)-\ell(x+h) \geqslant -\ell(x+h)\ h \\
\Leftrightarrow\quad & (1-h)\ell(x+h) \leqslant \ell(x).
\end{aligned}$$

Supposons alors $|h| < 1$, de sorte que $1-h$ ne s'annule pas. Alors

$$\begin{aligned}
& \ell(x+h) \leqslant \frac{\ell(x)}{1-h} \\
\Leftrightarrow\quad & \ell(x+h)-\ell(x) \leqslant \frac{\ell(x)}{1-h}-\ell(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \ell(x+h)-\ell(x) \leqslant \frac{h\,\ell(x)}{1-h}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

On en déduit alors de (2) et (3) l'encadrement suivant, pour $|h| < 1$:

$$\ell(x) \leqslant \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} \leqslant \frac{\ell(x)}{1-h}.$$

Par le théorème d'encadrement, en faisant tendre h vers 0, on obtient l'égalité

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ell(x+h)-\ell(x)}{h} = \ell(x).$$

Finalement, cette égalité étant valable pour tout réel x, ℓ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\ell' = \ell$ sur $\mathbb{R}$.