LEÇON N° 1 :

Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples simples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.

Pré-requis :
- *Vocabulaire ensembliste ;*
- Définition *: Un ensemble E est dit fini et de cardinal n, soit s'il est vide et alors $n = 0$, soit si $n \in \mathbb{N}^*$ et s'il existe une bijection de $E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. On dit alors que E est un n-ensemble et on écrit $\mathrm{Card}(E) = n$ (ou $|E| = n$).*

1.1 Réunions et produits d'ensembles finis

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ n ensembles.

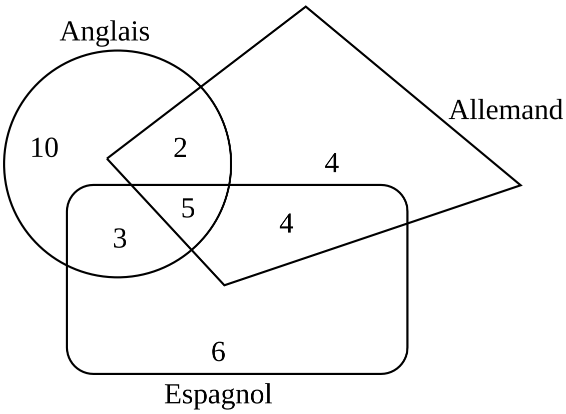
Proposition 1 : Si $E_1, \ldots, E_n$ est une partition finie de E, alors

$$|E| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| = \left| \coprod_{i=1}^{n} E_i \right| .$$

démonstration *: Il suffit de montrer que deux ensembles A de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et B de cardinal $p \in \mathbb{N}$ vérifient $|A \cup B| = |A| + |B|$ lorsque $A \cap B = \varnothing$. Le résultat est évident si $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Sinon, B est en bijection avec $[\![1, p]\!]$, donc avec $[\![n + 1, n + p]\!]$, et par suite, $A \cup B$ est en bijection avec $[\![1, n]\!] \cup [\![n + 1, n + p]\!] = [\![1, n + p]\!]$.* ■

Exemples :

1. Diagramme de Venn : Dans une classe, trois langues sont pratiquées. On sait que : 20 élèves font de l'anglais, 15 de l'allemand, 18 de l'espagnol, 7 de l'anglais et de l'allemand, 9 de l'allemand et de l'espagnol, 8 de l'anglais et de l'espagnol et enfin 5 pratiquent les trois langues. Quel est le nombre d'élèves ?



Le nombre d'élèves est donc de $10 + 2 + 5 + 3 + 6 + 4 + 4 = 34$.

2. Tableau de Cantor : Sur un échantillon de 100 personnes, on sait que 68 sont des hommes, et que 43 d'entre eux sont non fumeurs. De plus, 12% de ces personnes sont des femmes fumeuses. Combien y a-t-il de non fumeurs ? (les chiffres en rouge sont donc ceux qui sont donnés par l'énoncé)

Sexe / Fumeur	OUI	NON	Total
Homme	25	43	68
Femme	12	20	32
Total	37	63	100

On en déduit qu'il y a en tout 63 personnes non fumeuses.

3. **Exercice** : Excluant les lettres U, I, O et Q, combien d'immatriculations est-il possible de faire avec 2 lettres en France (les plaques sont de la forme 2112 ML 82) (attention, il faut au minimum deux chiffres pour constituer le nombre de gauche, 2112 pour l'exemple) ?

Définition 1 : Le *produit cartésien* de $p \in \mathbb{N}^*$ ensembles finis est l'ensemble noté $\prod_{i=1}^{p} E_i$ égal à

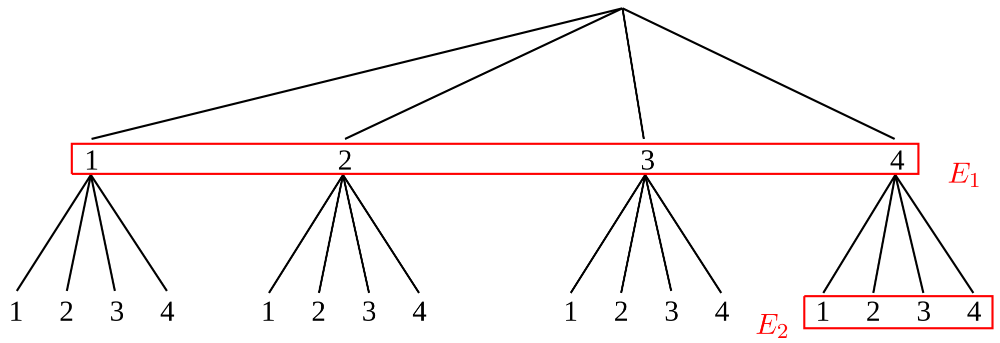
$$\prod_{i=1}^{p} E_i = E_1 \times \cdots \times E_p = \{(x_1, \ldots, x_p), \forall\, i \in [\![1, p]\!] \ : x_i \in \ E_i\}.$$

Théorème 1 : On a l'égalité suivante :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|.$$

démonstration : *Reprenons les notations de la démonstration précédente. Si* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$ *et pour tout* i *entre 1 et* n, $E_i = \{(a_i, y), y \in B\}$, *alors* $A \times B = \coprod_{i=1}^{n} E_i$ *car les* E_i *sont deux à deux disjoints. Or* $|E_i| = |B|$ *car* $(a_i, y) \longmapsto y$ *est une bijection de* $E_i \longrightarrow B$, *et il en résulte que* $|A \times B| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p = |A| \cdot |B|$. ■

Exemple (arbre) : On tire une boule avec remise dans une urne en contenant 4, puis on retire une boule dans cette urne.



On a $E_1 = E_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = E_1 \times E_2 \Rightarrow |E| = |E_1| \cdot |E_2| = 16$.

Exercice : Les restaurant « Maths'rak » propose au choix 3 entrées, 5 plats et 4 desserts. Combien de menus peut-on y constituer ?

1.2 Dénombrement des arrangements et permutations

Soient A et B deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

1.2.1 p-listes d'ensembles finis

Définition 2 : On appelle *p-liste d'éléments de A* toute liste $(a_1, \ldots, a_p)$ de p éléments de A éventuellement répétés. L'ensemble des p-listes de A est noté A^p.

Proposition 1 : A^p est fini, et $|A^p| = |A|^p$.

démonstration *:* $A^p = A \times \cdots \times A = \prod_{i=1}^{p} A \overset{thm\ 1}{\Longrightarrow} |A^p| = \prod_{i=1}^{p} |A| = |A|^p$, *et il en résulte que* A^p *est fini (parce que* A *l'est).* ■

`Remarque 1` : Une p-liste d'éléments de A peut être identifiée à une application de $[\![1, p]\!] \longrightarrow A$, par exemple $i \longmapsto a_i$.

Théorème 2 : A^B, l'ensemble des applications de $B \longrightarrow A$, est fini, et l'on a $|A^B| = |A|^{|B|}$.

démonstration *: Si* $B = \{b_1, \ldots, b_p\}$, *alors (*$|B| = p$ *et)* $\phi : A^B \longrightarrow A^p : f \longmapsto \big(f(b_1), \ldots, f(b_p)\big)$ *est bijective, donc* $|A^B| = |A^p| = |A|^p = n^p = |A|^{|B|}$. ■

1.2.2 Arrangements

Définition 3 : Un *arrangement de p éléments de A* ($p \in \mathbb{N}$) est une p-liste d'éléments deux à deux disjoints de A. On le note A_n^p et il est fini. Par convention, $A_n^0 = 1$.

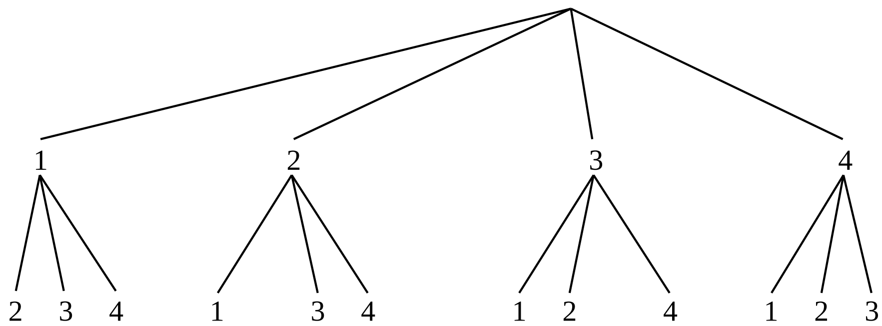
`Remarque 2` : De part cette définition, un tel arrangement peut s'identifier à une injection de $[\![1, p]\!]$ dans A.

Théorème 3 : Nous avons les égalités suivantes :

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

démonstration : *Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ un arrangement. Il y a n choix possibles pour a_1, $(n-1)$ pour a_2, ..., $(n-p+1)$ pour a_p. D'où $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$. Alors si $p \leqslant n$, on a bien le résultat recherché, et si $p > n$, l'un des facteurs est nul, donc $A_n^p = 0$.* ■

Exemple (arbre) : Tirages successifs de deux boules d'une urne, sans remise. Quels sont les différents couples résultant de ce tirage ($(1, 4)$ signifierait que la boule n° 1 a été tirée en premier, puis la boule n° 4) ?



On a $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$.

Exercice : Montrer que $A_n^p = p \cdot A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.

__Solution__ : Soit un ensemble à n éléments. On suppose que cet ensemble a déjà subi un arrangement de p élément parmi n. On souhaite alors démontrer qu'en enlevant un élément quelconque de cet ensemble, on retrouve l'arrangement déjà effectué autrement. On décide donc de retirer un élément de cet ensemble : celui qui est retiré l'est soit de l'arrangement, c'est-à-dire l'un des p éléments parmi n (donc p possibilités) auquel cas il reste $(p-1)$ éléments à arranger parmi $(n-1)$, soit il ne l'est pas de l'arrangement (i.e. on enlève l'un des $n-p$ éléments non arrangés), et il reste p éléments à arranger parmi $(n-1)$. Ces deux possiblités étant distinctes, le cardinal de leur union est la somme des cardinaux (prop. 1), d'où :

$$A_n^p = p \cdot A_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p.$$

◇

Exercice : Démontrer le théorème 3 en identifiant A_n^p au nombre d'injections de B dans A.

Définition 4 : Une *permutation de A* est un arrangement de n éléments de A. Le nombre de permutations de A (et donc de bijections de $E \longrightarrow E$) est donc $n!$ (c'est le cas particulier $n = p$ dans A_n^p).

1.3 Applications

Exercice : Soit les nombres obtenus en permutant 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

1. Quel est le nombre de ces nombres ?
2. Rangés par ordre croissant, quel est le rang de 362 145 ?
3. Montrer qu'aucun de ces nombres n'est ni premier, ni un carré parfait.
4. Quelle est la somme de ces nombres ?

Solution :

1. Il y en a exactement $6! = 720$.
2. Parmi ces nombres, $5!$ commencent par un 1, $5!$ par un 2, $4 \times 4!$ commencent par 31, 32, 34 ou 35 et enfin, $3!$ commencent par 361. Le nombre suivant (par ordre croissant) ne commençant pas par 361 étant 362 145, il suffit de compter le nombre de nombres inférieurs à celui-ci : il y en a $5! + 5! + 4 \cdot 4! + 3! = 342$. Finalement, 362 145 est le 343e de ces nombres.
3. Pour tous les nombres, la somme des chiffres vaut 21, ils sont donc tous divisibles par 3 et donc non premiers. De plus, cette somme n'est pas multiple de 9, donc aucun de ces nombres n'est un carré parfait.
4. Puisque chacun des six chiffres peut occuper les six places, il y a $5!$ nombres où l'un de ces chiffres est celui des unités, autant où le même chiffre est chiffre des dizaines, etc. La somme des unités est donc égale à $1 \times (1+2+3+4+5+6) \times 5!$. La somme des dizaines est égale à $10 \times (1+2+3+4+5+) \times 5!$, etc. La somme recherchée est donc finalement égale à
$$120(1 + 10 + \cdots + 100000)(1 + 2 + \cdots + 6) = 279\,999\,720.$$

Cet exercice s'achève donc ici. ◊

Exercice : Déterminer le nombre d'arrangements de « SABRINA ».

Solution : Il y en a $7!/2! = 2\,520$. On divise par $2!$ car il y a deux lettres qui sont les mêmes dans le mot « SABRINA » : c'est le « A ». En effet, « SABRINA » = « SABRINA », bien que l'on puisse penser que dans le premier membre, le premier « A » est le premier du mot et dans le second, le premier « A » est le dernier du mot ; ces deux mots seraient donc différents, bien que ce sont les mêmes, et c'est pour cela que l'on divise par $2!$. ◊

Exercice : 17 chevaux sont au départ d'une course. Déterminer le nombre d'arrivées possibles pour un quarté dans l'ordre et dans le désordre.

Solution : Dans le désordre, il s'agit de dénombrer les 4-listes de l'ensemble des 17 chevaux : $A_{17}^4 = 17 \times 16 \times 15 \times 14 = 57\,120$. Pour chaque combinaison gagnante, il y a $4! = 24$ combinaisons identiques si l'on ne tient pas compte de l'ordre, soit un total de $57\,120/24 = 2\,380$ combinaisons tenant compte de l'ordre. ◊

`Remarque 3` : On vient d'introduire les coefficients binomiaux : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ correspondant à un « tirage tenant compte de l'ordre » (cf. leçon n° 3)

Alphabet braille

Avec une configuration de six points disposés en rectangle et tels que chacun puisse être en relief ou non (au moins un en relief), on dispose de $2^6 - 1 = 63$ signes différents pour décrire des lettres, des chiffres, et les ponctuations de la langue française.

En effet, chacun des six emplacements peut être en relief ou non, on dénombre donc les 6-listes de l'ensemble $\{\text{relief, pas relief}\}$, soit 2^6 possibilités, auxquelles on retranche celle où aucun des emplacements ne serait en relief.