LEÇON N° 3 :

Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.

Pré-requis :
– *Cardinal d'un ensemble fini, arrangements ;*
– *Raisonnement par récurrence.*

3.1 Définitions et propriétés

Définition 1 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* de $p \in \mathbb{N}$ éléments de E toute partie de E à p éléments. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments d'une ensemble en contenant n (il se lit « p parmi n »). Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

Remarques 1 :
– $\varnothing$ est la seule partie de E à 0 éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$,
E est la seule partie de E à n éléments, donc $\binom{n}{n} = 1$;
– $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ par définition ;
– Si $p > n$, il ne peut y avoir de parties de p éléments d'un ensemble en contenant n, donc si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Théorème 1 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

démonstration : *Les nombre d'ensembles ordonnés de p éléments d'un ensemble à n éléments est A_n^p. Or il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir une partie à p éléments dans un ensemble à n éléments, et $p!$ manières d'ordonner les éléments dans chaque parties. Par le principe multiplicatif, on a donc l'égalité $A_n^p = p!\binom{n}{p}$, d'où le résultat, sachant que $A_n^p = n!/(n-p)!$.* ■

Conséquences : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 1 (formule de Pascal) :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

démonstration : *Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E, c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ éléments restants forment une partie de l'ensemble $E\backslash\{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E\backslash\{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée.* ■

Triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	$\cdots$
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Corollaire 1 (formule itérée de Pascal) : Soit $p \leqslant n$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

démonstration : *On effectue une récurrence sur l'entier n.*

• **Initialisation :** *Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1 d'après la remarque 1.*

• **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:*

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \overset{\text{H.R.}}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

La dernière égalité étant justifiée par la formule de Pascal. ■

3.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 2 (formule du binôme) : Soit A un anneau, a, b deux éléments de A qui commutent. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Remarque 2 : Les coefficients binomiaux tirent leur appellation de cette formule.

démonstration : *Par récurrence sur l'entier n.*

- **Initialisation :** *Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).*
- **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{H.R.}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{k+1}\,b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\,a^k\,b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \underbrace{a^{n+1}}_{(k=n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\,a^k\,b^{n-k+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{0}\,a^0\,b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k\,b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}\,a^{n+1}\,b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\,a^k\,b^{n-k}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux. ■

Corollaire 2 : On a les égalités suivantes :

$$\textbf{(i)}\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad ; \qquad \textbf{(ii)}\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

démonstration : *Pour (i), on utilise le théorème précédent avec $a = 1$ et $b = 1$. Pour (ii), on l'utilise avec $a = -1$ et $b = 1$.* ■

Remarque 3 : Le point (i) traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement 0, 1, ...éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.

3.3 Applications

3.3.1 Exemples triviaux

Le Loto : Il s'agit de choisir 7 nombres parmi 49. L'ordre ne comptant pas, on dénombre le nombre de parties de 7 éléments de l'ensemble $\{1, \ldots, 49\}$ de cardinal 49 : il y a donc $\binom{49}{7}$ possibilités, soit 85 900 584.

Dénombrement : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu en comptant 32. Combien de tirages sont possibles où l'on ait...

– exactement trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} = 1\,512$;
– au moins trois rois ? $\binom{4}{3} \cdot \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \cdot \binom{28}{1} = 1\,540$;
– deux $\heartsuit$ et trois $\diamondsuit$? $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3} = 1\,568$;

3.3.2 Sommes

La formule itérée de Pascal permet de déterminer des sommes de la formes $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour un certain p donné. Voyons par exemple ce que cela donne avec $p = 1$, puis $p = 2$.

$\boldsymbol{p = 1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$\boldsymbol{p = 2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2!\,(k-2)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+1}{3},$$

les premières égalités étant du calcul formel, et la dernière l'application de la formule itérée de Pascal. On en tire alors (connaissant le résultat pour $p = 1$) :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2 = \binom{n+1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.3.3 Trigonométrie (linéarisation)

Exercice : Linéariser $\sin^3(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{ix} - e^{-ix})^3 \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - \binom{3}{1} e^{2ix}\, e^{-ix} + \binom{3}{2} e^{ix}\, e^{-2ix} - e^{-3ix}\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right) = -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin x\right).
\end{aligned}$$

3.3.4 Petit théorème de Fermat

Théorème 3 : Soient p une entier naturel premier et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a^p \equiv a\ [p]$.

démonstration : *Puisque p est premier, alors pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$. En effet, $\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)/k! \Leftrightarrow k!\binom{p}{k} = p(p-1)\cdots(p-k+1)$. Comme p est premier, il est premier avec tout entier le précédent, donc $p \wedge k = 1$, et il vient que p ne divise pas $k!$. Par le théorème de Gauss, il s'ensuit que p divise $\binom{p}{k}$. Procédons ensuite par récurrence sur l'entier $a \in \mathbb{N}$:*

- **Initialisation :** *Si $a = 0$, le résultat est évident.*
- **Hérédité :** *Supposons que $(a-1)^p \equiv a - 1\ [p]$.*

$$a^p = (a-1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(a-1)^k \equiv (a-1)^p + 1\ [p] \overset{H.R.}{\equiv} a - 1 + 1\ [p] \equiv a\ [p].$$

Si $a \in (-\mathbb{N})^*$, alors $-a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a)^p \equiv -a\ [p]$. Supposons alors un instant $p \neq 2$ de sorte que la condition p premier soit équivalente à dire que p est impair. La relation de congruence précédente devient alors $-a^p \equiv -a\ [p] \Leftrightarrow a^p \equiv a\ [p]$. Enfin, si $p = 2$, alors quelque soit a, l'entier $a^p - a$ est pair, et donc divisible par p. ■

3.3.5 Formule de Van der Monde

Proposition 2 : Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leqslant m + n$, on a l'égalité

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

démonstration : *Soit x un réel. Alors $(1+x)^m\,(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p}\ x^p$. Or*

$$\begin{aligned}
(1+x)^m\,(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\ x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\ x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\ x^{i+j} \\
&= \left[\binom{m}{0}\binom{n}{0}\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\right)x\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}\right)x^2\right] + \cdots \\
&= \sum_{p=0}^{m+n}\left[\left(\sum_{\substack{i,j>0\,|\\ i+j=p}}\binom{m}{i}\binom{n}{j}\right)x^p\right].
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p, on obtient finalement que pour tout entier $p \in \{0, \dots, m+n\}$,

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{i,j>0\,|\\ i+j=p}}\binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{p}\binom{m}{i}\binom{n}{p-i}.$$

■