LEÇON N° 6 :

Variables aléatoires à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.

Pré-requis :
- *Notions élémentaires de probabilité : univers, probabilité, événements indépendants, espace probabilisé, système complet d'événements ;*
- *Combinaisons, coefficients binomiaux.*

Contexte : On dispose d'une machine contenant quatre boules bleues et deux rouges. A l'insertion d'une pièce de 2€, deux boules sont tirées au sort (chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée). Si se sont deux boules rouges, le joueur gagne 10€, et s'il n'y en a qu'une, il gagne 1€. La question est de savoir si ce jeu est rentable pour le joueur. Cet exemple sera utilisé tout au long de la leçon.

Objectif : La recherche de l'univers Ω étant souvent difficile, l'introduction des « variables aléatoires » permettront de se ramener à l'étude d'applications d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, généralement plus facile à étudier...

Soient Ω un ensemble fini, $\mathscr{P}(\Omega)$ les parties des Ω et P une probabilité. On se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$.

6.1 Définitions et propriétés

6.1.1 Variable aléatoire

Définition 1 : On appelle *variable aléatoire réelle* (notée dans la suite v.a.r.) toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. $X(\Omega)$ est appelé *univers image*.

Exemple : Si Ω désigne l'ensemble des tirages de 2 boules parmi 6, alors $|\Omega| = \binom{6}{2} = 15$. Si X désigne la v.a.r. représentant le gain du joueur sur une partie, alors $X(\Omega) = \{-2, -1, 8\}$.

6.1.2 Probabilité image

Proposition 1 : L'application

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} : \mathscr{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto \mathrm{P}(X^{-1}(A))$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$.

démonstration *:*

- $\mathcal{P}(X(\Omega)) = \mathrm{P}\Big(X^{-1}(X(\Omega))\Big) = \mathrm{P}(\Omega) = 1$, *puisque* P *est une probabilité sur* Ω.
- *Soient* $A, B \in X(\Omega)$ *deux ensembles distincts. Alors* $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(A \cup B)\big) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)\big) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(A)\big) + \mathrm{P}\big(X^{-1}(B)\big) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$.

  En effet, $X^{-1}(A \cup B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cup B\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$. *Remarquons aussi que* $A \cap B = \varnothing \Rightarrow X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = \varnothing$ *car* $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A \cap B\}$.
- *Soit* $A \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)$, $\mathcal{P}(A) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(A)\big) \in [0,1]$, *car* P *est une probabilité sur* Ω.

$\mathcal{P}$ *vérifie la définition d'une probabilité sur* $X(\Omega)$. ■

Notations : Par définition, $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$. On notera plus simplement cet ensemble $X \in A$ dans la suite, de sorte que $\mathcal{P}(A) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(A)\big)$ s'écrive $\mathrm{P}(X \in A)$. Ainsi, si $A = \{x\}$ est un singleton (réel), nous noterons $\mathrm{P}(X = x)$, et si $A =]-\infty, x]$ (par exemple, avec x réel), nous noterons $\mathrm{P}(X \leqslant x)$.

Définition 2 : L'application $\mathcal{P}$ définie ci-dessus est appelée *probabilité image* de la v.a.r. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

`Remarque 1` : Dans le cas général d'un espace probabilisé de la forme $(\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P})$ où $\mathscr{T}$ désigne une tribu de Ω, pour que X soit une v.a.r., il faut ajouter la condition « $\forall K \in \mathbb{R}, X^{-1}(K) \in \mathscr{T}$ ». La condition est naturellement respectée dans le cas particulier $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$.

6.1.3 Loi de probabilité, fonction de répartition

Définition 3 : $\mathcal{P}$ est appelée *loi de probabilité* de la v.a.r. X. La fonction

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \mathrm{P}(X \leqslant x)$$

est appelée *fonction de répartition* de X.

`Remarque 2` : $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leqslant x) = \mathrm{P}\big(X^{-1}(]-\infty, x])\big)$ pour être mathématiquement rigoureux…

Exemple : Il s'agit de déterminer $\mathcal{P}(\{\omega\})$ pour $\omega \in X(\Omega)$, afin d'établir la loi de probabilité de X. Dans notre exemple, nous déterminons que

$$\mathcal{P}(\{8\}) = \mathrm{P}(X=8) = \frac{1}{|\Omega|}\left(\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{0}\right) = \frac{1}{15} \quad ; \quad \mathrm{P}(X=-1) = \frac{8}{15} \quad ; \quad \mathrm{P}(X=-2) = \frac{6}{15}.$$

On peut représenter une telle loi par un diagramme en bâtons (rappelons que l'ensemble des valeurs est fini) :

`Remarque 3` : $\sum_{\omega \in X(\Omega)} \mathcal{P}(\{\omega\}) = 1$. Cela se vérifie sur notre exemple.

Proposition 2 : Soit X une v.a.r. prenant les valeurs $x_1 < \cdots < x_n$. Alors :

- **(i)** $\forall\, x < x_1, F_X(x) = 0$; $\quad \forall\, x \geqslant x_n, F_X(x) = 1$;
- **(ii)** F_X **est croissante sur** $\mathbb{R}$;
- **(iii)** $\mathrm{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

démonstration :

(i) $\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}, x < x_i$ *(resp.* $x \geqslant x_i$*), donc* $F_X(x) = 0$ *(resp.* 1*).*

(ii) Soient $a < b$*. Alors* $(X \leqslant a) \subset (X \leqslant b)$*, donc* $\mathrm{P}(X \leqslant a) \leqslant \mathrm{P}(X \leqslant b)$*, d'où* $F_X(a) \leqslant F_X(b)$*, et* F_X *est croissante sur* $\mathbb{R}$*.*

(iii) $\mathrm{P}(X = x_i) = \mathrm{P}(X \leqslant x_i) - \mathrm{P}(X < x_i) = \mathrm{P}(X \leqslant x_i) - \mathrm{P}(X \leqslant x_{i-1}) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

La proposition est ainsi démontrée. ■

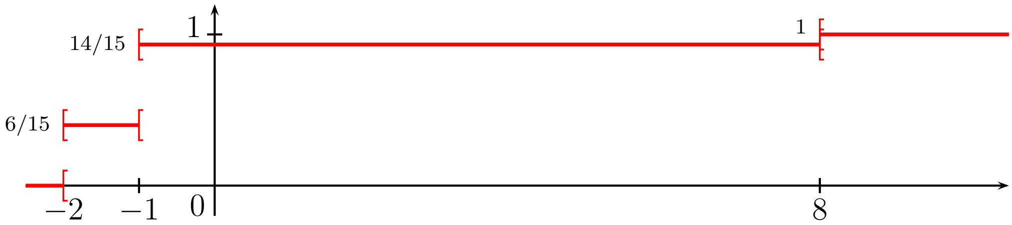
Conséquences :

– F_X est continue à droite ;
– $\forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}, \forall\, x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad F_X(x) = \sum_{k=1}^{i} \mathrm{P}(X = x_k)$.

Exemple : On détermine toujours sur le même exemple que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < -2, \\ 6/15 & \text{si } \; -2 \leqslant x < -1, \\ 14/15 & \text{si } \; -1 \leqslant x < 8, \\ 1 & \text{si } \; x \geqslant 8. \end{cases}$$

On peut aussi représenter la fonction de répartition graphiquement :



6.1.4 Variables aléatoires indépendantes

Définition 4 : Deux v.a.r. X et Y définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ sont dites indépendantes si

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(X = x, Y = y) := \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big) = \mathrm{P}(X = x) \cdot \mathrm{P}(Y = y).$$

6.2 Espérance, variance, écart-type

6.2.1 Espérance

Définition 5 : Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une v.a.r. telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On appelle *espérance mathématique* de X le nombre $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ \mathrm{P}(X = x_i).$$

Exemple : $E(X) = -2 \cdot \dfrac{6}{15} - 1 \cdot \dfrac{8}{15} + 8 \cdot \dfrac{1}{15} = -\dfrac{4}{5}$.
Le jeu n'est donc pas rentable pour le joueur puisqu'il perdrait en moyenne 4/5 d'€ par partie.

Proposition 3 : Soient X, Y deux v.a.r. définies sur Ω, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y),$$

et si X est la v.a.r. telle que $X(\Omega) = \{\lambda\}$, alors $E(X) = \lambda$.

démonstration *:* $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i\ \mathrm{P}(\lambda X = \lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\ \mathrm{P}(X = x_i) = \lambda E(X)$. *Si X désigne la v.a.r. ne prenant que l'unique valeur λ, alors*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{1} \lambda \mathrm{P}(X = \lambda) = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Notons enfin $z_1, \dots, z_n$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. $X+Y$. Alors

$$\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{p=1}^{n} z_p \, \mathrm{P}(X+Y=z_p) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{i,j=1 \,|\\ x_i+y_j=z_p}}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)\, z_p \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{\substack{i,j=1 \,|\\ x_i+y_j=z_p}}^{n} \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)\, z_p \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)(x_i+y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{=\,\mathrm{P}(X=x_i)} \Bigg) x_i + \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_j)}_{=\,\mathrm{P}(Y=y_j)} \Bigg) y_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathrm{P}(X=x_i) + \sum_{j=1}^{n} y_j \, \mathrm{P}(Y=y_j) = E(X)+E(Y).
\end{aligned}$$

L'égalité (1) est justifiée par le fait que les sommes sont finies. La (2) provient du fait que pour i et j fixés, il n'y a qu'un seul entier p vérifiant la relation $x_i+y_j=z_p$. ■

Proposition 4 : Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes définies sur Ω, alors

$$E(XY) = E(X)\, E(Y).$$

démonstration *: Notons $z_1, \dots, z_n$ l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. XY. Alors, en procédent comme précédemment,*

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{p=1}^{n} z_p \, \mathrm{P}(XY=z_p) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{i,j=1 \,|\\ x_i+y_j=z_p}}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)\, z_p \\
&= \sum_{\substack{i,j=1 \,|\\ x_i+y_j=z_p}}^{n} \sum_{p=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)\, z_p \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i, Y=y_i)(x_i\, y_j) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X=x_i)\, x_i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(Y=y_j)\, y_j = E(X)\, E(Y),
\end{aligned}$$

où l'égalité (3) provient de la définition de l'indépendance entre X et Y. ■

`Remarques 4 :`

– $X - E(X)$ est une v.a.r. dite « centrée », c'est-à-dire d'espérance nulle.

– La réciproque de cette proposition est généralement fausse, comme le prouve l'exemple donné en 4.4.

6.2.2 Variance et écart-type

Définition 6 : On appelle *variance* d'une v.a.r. X définie sur Ω le nombre $V(X) = E\big((X - E(X))^2\big)$. L'*écart-type* de X est alors définie par le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

`Remarque 5` : La variance est toujours positive, car

$$V(X) = E\big((X - E(X))^2\big) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\big(x_i - E(x)\big)^2}_{\geqslant 0} \underbrace{\mathrm{P}(X = x_i)}_{\in [0,1]},$$

ce qui rend pertinent la définition de l'écart-type.

Exemple : $V(X) = \left(-2 - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{6}{15} + \left(-1 - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{8}{15} + \left(8 - \frac{4}{5}\right)^2 \frac{1}{15} = \frac{144}{25} = 0,76$. D'où aussi $\sigma(X) = \frac{12}{5} = 2,4$.

Proposition 5 (formule de Kœnig-Huygens) : Toute v.a.r. X sur Ω d'espérance $E(X)$ vérifie l'égalité $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ (on a noté $E^2(X) = \big(E(X)\big)^2$).

démonstration : $V(X) = E((X - E(X))^2) = E\big(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)\big) = E(X^2) - 2E\big(XE(X)\big) + E\big(E^2(X)\big) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$. ■

`Remarque 6` : On pourra vérifier sur noter exemple que la calcul donne le même résultat que celui trouvé précédemment (bien heureusement !).

Proposition 6 : Pour tous réels a, b,

$$V(aX + b) = a^2 V(X).$$

De plus, si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes sur Ω, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

démonstration : $V(aX + b) = E\big((aX + b - E(aX + b))^2\big) = E\big((aX + b - aE(X) - b)^2\big) = E\big(a^2(X - E(X))^2\big) = a^2 V(X)$. *De plus,*

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E\big((X + Y - E(X+Y))^2\big) \\
&= E\big((X - E(X))^2\big) + E\big((Y - E(Y))^2\big) + 2E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) \\
&= V(X) + V(Y) + 2E\big(XY - X(E(Y) - Y(E(X) + E(X)E(Y)\big) \\
&= V(X) + V(Y) + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) - 2E(Y)E(X) + 2E(X)E(Y) \\
&= V(X) + V(Y),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la proposition 4. ■

6.3 Divers

Proposition 7 (inégalité de Tchebychev) : Soit X une v.a.r.. Alors

$$\forall\, r > 0, \forall\, \varepsilon > 0, \mathrm{P}(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$$

démonstration *:*

$$\begin{aligned} E(|X|^r) &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^r \,\mathrm{P}(X = x_i) = \underbrace{\sum_{\substack{i=1\,|\\ |x_i|<\varepsilon}}^{n} |x_i|^r \,\mathrm{P}(X = x_i)}_{\geqslant 0} + \sum_{\substack{i=1\,|\\ |x_i|\geqslant\varepsilon}}^{n} |x_i|^r \,\mathrm{P}(X = x_i) \\ &\geqslant \sum_{\substack{i=1\,|\\ |x_i|\geqslant\varepsilon}}^{n} |x_i|^r \,\mathrm{P}(X = x_i) \geqslant \sum_{\substack{i=1\,|\\ |x_i|\geqslant\varepsilon}}^{n} \varepsilon^r \,\mathrm{P}(X = x_i) \\ &= \varepsilon^r \sum_{\substack{i=1\,|\\ |x_i|\geqslant\varepsilon}}^{n} \mathrm{P}(X = x_i) = \varepsilon^r \,\mathrm{P}(|X| \geqslant \varepsilon), \end{aligned}$$

d'où le résultat en divisant les deux membres par $\varepsilon^r > 0$. ■

Proposition 8 (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : Soit X une v.a.r.. Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \mathrm{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

démonstration *: Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la v.a.r.* $X - E(X)$*, avec* $r = 2$. ■

Ces outils nous permettent en particulier de démontrer la loi faible des grands nombres :

Théorème 1 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Alors

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

démonstration *: Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Posons* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*, de sorte que (par indépendance),* $E(S_n) = n\mu$ *et* $V(S_n) = n\sigma^2$*. Donc* $E(S_n/n) = \mu$ *et* $V(S_n/n) = \sigma^2/n$*. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en se donnant un* $\varepsilon > 0$*, on a* $\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant 0\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} V\left(\frac{S_n}{n}\right)$ *; c'est-à-dire*

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geqslant 0\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\sigma^2}{n},$$

d'où le résultat en passant à la limite. ■

6.4 Exemples

6.4.1 L'espérance et la variance autrement…

Soit $g(t) = E\big((X-t)^2\big)$, où X est une v.a.r. et t un réel. Etudions les variations de g.

$V(X-t) = E\big((X-t)^2\big) - E^2(X-t) = V(X)$ (rappel : $V(aX+b) = a^2\,V(X)$, ici avec $a=1$ et $b=-t$), donc $g(t) = V(X) + E^2(X-t) = \big(t - E(X)\big)^2 + V(X)$. Par suite, g atteint son minimum $V(X)$ en $t = E(X)$.

6.4.2 Loi uniforme discrète

Soit X une v.a.r. définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathrm{P})$ telle que $X(\Omega) = \{1,\dots,n\}$ et pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, $\mathrm{P}(X=k) = 1/n$. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} i\,P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}.\\
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2\,P(X=i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.\\
\text{D'où } V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

6.4.3 Surprenant ?

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ boîtes et n boules, chacunes numérotées de 1 à n. On range au hasard les n boules dans les n boîtes (une seule boule par boîte). On désigne par X le nombre de « coïncidences », c'est-à-dire le nombre de boîtes contenant une boule de même numéro. Calculons et interprétons $E(X)$.

Soit $\Omega = \big\{\text{bijections } \varphi : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}\big\}$ et X_i le nombre de coïncidences dans la i-ième boîte (donc $X_i \in \{0,1\}$) défini par

$$\forall\,\omega \in \Omega, \quad X_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega(i) = i \\ 0 & \text{si} \quad \omega(i) \neq i. \end{cases}$$

Alors il est évident que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, d'où

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} 0\cdot\mathrm{P}(X_i=0) + 1\cdot\mathrm{P}(X_i=1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.$$

Quelque soit l'entier n, $E(X)$ en est indépendant. Plus fort encore, on peut espérer ne trouver qu'une seule boîte contenant une boule de même numéro, quelque soit le nombre de boîtes ! ! !

6.4.4 $E(XY) = E(X)E(Y)$ avec X et Y non indépendants

On lance deux dés équilibrés et l'on note X et Y les obtenus (X et Y suivent donc la même loi : la loi uniforme discrète sur $\{1,\dots,6\}$). Soient aussi les v.a.r. $S = X+Y$ et $D = X-Y$.

1. **Montrons que $\mathrm{P}(S=2, D=2) \neq \mathrm{P}(S=2)\cdot \mathrm{P}(D=2)$:**
   $\mathrm{P}(S=2, D=2)=0$. En effet, aucun lancer de dés n'assure une somme égale à 2 et une différence égale à 2. De plus, on détermine que $\mathrm{P}(S=2)\cdot\mathrm{P}(D=2)=\frac{1}{36}\frac{4}{36}\neq 0$. Les v.a.r. S et D ne sont donc pas indépendantes.
2. **Montrons que $E(SD)=E(S)E(D)$:**
   $E(SD)=E\big((X+Y)(X-Y)\big)=E(X^2-Y^2)=E(X^2)-E(Y^2)=0$ car X et Y suivent la même loi. De plus, $E(S)E(D)=E(X+Y)E(X-Y)=\big(E(X)+E(Y)\big)\big(E(X)-E(Y)\big)=E^2(X)-E^2(Y)=0$ pour la même raison. D'où l'égalité recherchée.

6.5 Commentaires

1. **Si l'on se donne deux v.a.r. X et Y ayant la même loi de probabilité, sont-elles nécessairement les mêmes ?** NON. Prendre par exemple $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, X définie par $X(\omega_1)=X(\omega_2)=0, X(\omega_3)=1$ et Y définie par $Y(\omega_1)=Y(\omega_3)=0, Y(\omega_2)=1$, avec une probabilité P définie par $\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(Y=0)=\mathrm{P}(Y=1)=1/2$.
2. **Comment justifier le calcul de l'espérance d'une v.a.r. suivant une loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$, en supposant qu'elle soit connue (elle vaut np) ?** On pourrait partir de la définition de l'espérance, mais cela demandera un travail considérable sur le maniement des sommes et suppose de connaître la formule du binôme de Newton. Il est préférable pour un élève de dire qu'on peut considérer cette v.a.r. comme la répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli, et utiliser la linéarité de l'espérance.