LEÇON N° 7 :

Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.

Pré-requis :
– *Probabilités : définition, calculs et probabilités conditionnelles ;*
– *Notion de variables aléatoires, et propriétés associées : espérance, variance ;*
– *Indépendance de variables aléatoires :* $X \perp Y \Leftrightarrow \mathrm{P}(X \cap Y) = \mathrm{P}(X)\,\mathrm{P}(Y)$.

Introduction

Définition 1 : On appelle *épreuve de Bernoulli* toute épreuve ne possédant que deux issues possibles, que l'on appelle *succès* et *échec*.

Si X désigne une variable aléatoire réelle comptant le nombre de succès dans une épreuve de Bernoulli, alors nous avons les deux cas suivants :
◇ $(X = 1)$ est l'événement corespondant au succès : on lui donne la probabilité p ($p \in [0, 1]$) ;
◇ $(X = 0)$ est donc l'événement correspondant à l'échec. Il a pour probabilité $q = 1 - p$.

Si une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli, alors on note $\mathscr{L}(X) = \mathscr{B}(p)$, où p désigne la probabilité du succès.

Exemples :

1. Le lancer d'une pièce équilibrée (non truquée) est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles :
   ◇ Soit $(X = 1)$, correspondant à l'événement « obtenir Pile », de probabilité $0,5$;
   ◇ Soit $(X = 1)$, correspondant à l'événement « obtenir Face », de probabilité $0,5$.
2. Si on lance un dé équilibré, on peut considérer (par exemple) l'événement « obtenir 6 » comme étant le succès, et donc l'événement « ne pas obtenir 6 » comme l'échec. Dans ces conditions, $\mathrm{P}(X = 1) = 1/6$ et $\mathrm{P}(X = 0) = 5/6$.

`Remarque 1` : Puisqu'il n'y a que deux issues possibles dans une épreuve de Bernoulli, c'est nous qui choisissons quel événement sera synonyme de succès. On aura pu choisir l'événement « obtenir Face » comme succès dans l'exemple précédent.

Théorème 1 : L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli sont données par

$$E(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1-p) = pq.$$

démonstration : *Récapitulons la loi d'une variable aléatoire de Bernoulli grâce au tableau suivant :*

x_i	0	1
$\mathrm{P}(X = x_i)$	$1-p$	p

Rappelons les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire :

$$E(X) = \sum_i x_i \, \mathrm{P}(X = x_i) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

Ici, nous avons donc $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$ *et*
$\mathrm{Var}(X) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = (1-p)[p(1-p) + p^2] = p(1-p)$. ■

7.1 Schéma de Bernoulli

Effectuons maintenant n épreuves successives de Bernoulli (par exemple, on lance n fois de suite une pièce équilibrée). On a donc pour univers $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n$. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles, chacune suivant une loi de Bernoulli. La variable X_i est définie de Ω dans $\{0,1\}$ par $X_i\big((x_1, \dots, x_n)\big) = x_i$, avec $x_i = 1$ en cas de succès, et $x_i = 0$ en cas d'échec.

Pour cette expérience aléaoire, on se fixe quelques hypothèses de départ :
H_1 : $\mathscr{L}(X_1) = \cdots = \mathscr{L}(X_n) = \mathscr{B}(p)$;
H_2 : La variable aléatoire X_i est indépendante de $X_1, \dots, X_{i-1}$, et de plus

$$\mathrm{P}_{X_1=\varepsilon_1,\dots,X_{i-1}=\varepsilon_{i-1}}(X_i = \varepsilon_i) = \mathrm{P}(X_i = \varepsilon_i),$$

avec $\varepsilon_k \in \{0,1\}$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant i$.

Théorème 2 : Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω qui vérifie H_1 et H_2.

démonstration :

Analyse : *Supposons qu'une telle probabilité existe. Soit* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega = \{0,1\}^n$ *un événement élémentaire. On a alors, par définition d'une probabilité conditionnelle :*

$$\mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \mathrm{P}_{X_1=\varepsilon_1,\dots,X_{n-1}=\varepsilon_{n-1}}(X_n = \varepsilon_n)\, \mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} = \varepsilon_{n-1}).$$

En utilisant l'hypothèse H_2*, on a alors*

$$\mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \mathrm{P}(X_n = \varepsilon_n)\, \mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} = \varepsilon_{n-1}).$$

En réitérant ce procédé $n-1$ *fois, on obtient au final*

$$\mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = \varepsilon_i).$$

Les valeurs de P *sur les événements élémentaires déterminent de manière unique cette probabilité :*

$$\mathbb{P}\big(X = (x_1, \dots, x_n)\big) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = \varepsilon_i).$$

Synthèse : *Définissons $\mathbb{P}$ sur les événements élémentaires par la relation*

$$\mathbb{P}\big(X = (x_1, \ldots, x_n)\big) = \mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_2, \ldots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i = \varepsilon_i).$$

Est-ce une probabilité ? *On a*

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\omega \in \Omega_k} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\omega \in \Omega_k} p^k \, q^{n-k},$$

avec $q = 1 - p$ et $\Omega_k = \{$ événements élémentaires admettant exactement k succès$\}$.

En effet, si $\omega \in \Omega_k$, alors on a (d'après l'hypothèse H_1)

$$\mathbb{P}(\omega) = \big(\mathrm{P}(X_i = 1)\big)^k \, \big(\mathrm{P}(X_i = 0)\big)^{n-k} = p^k \, q^{n-k}.$$

Pour obtenir k succès au bout de n épreuves de Bernoulli, on a $\binom{n}{k}$ possibilités. Au final,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \, q^{n-k} = 1.$$

La dernière égalité provient de la formule du binôme de Newton.

De plus, montrer que $\mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2)$ est évident grâce à la définition de $\mathbb{P}$. En effet, si l'on note $\omega_1 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\omega_2 = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2) &= \mathrm{P}\big((X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n) \cup ((X_1 = \epsilon_1, \ldots, X_n = \epsilon_n)\big) \\
&\overset{P\ proba}{=} \mathrm{P}(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n) + \mathrm{P}(X_1 = \epsilon_1, \ldots, X_n = \epsilon_n) \\
&= \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2).
\end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ vérifie-t-elle H_1 et H_2 ? *Étant partis de ces hypothèses pour construire $\mathbb{P}$, on peut affirmer que cette probabilité vérifie bien les hypothèses H_1 et H_2.*

Nous laissons cette vérification au soin du lecteur. ■

Définition 2 : L'univers Ω muni de la probabilité $\mathbb{P}$ est appelé *schéma de Bernoulli* à n épreuves, et de paramètre p.

`Remarque 2` : Dans la suite, nous noterons la probabilité $\mathbb{P}$ par la lettre « simple » P. Il ne peut y avoir de confusion possible entre une épreuve et un schéma de Bernoulli, d'où cette identification.

7.2 Loi binomiale

Soit (Ω, P) un schéma de Bernoulli à n épreuves, de paramètre p. Soit S_n la variable aléatoire associée au nombre de succès au bout de n épreuves de Bernoulli, donc définie de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Définition 3 : Dans ces conditions, on dit que S_n suit une *loi binomiale* de paramètres n et p, notée $\mathscr{B}(n,p)$.

Théorème 3 : Si $\mathscr{L}(X) = \mathscr{B}(n,p)$, alors pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$,

$$\mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}.$$

démonstration : *Découle directement de la démonstration ci-dessus.* ■

Exemple : On lance un dé 10 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est égale à

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,84,$$

où $(\frac{5}{6})^{10}$ désigne la probabilité de n'obtenir 6 aucune fois.

Théorème 4 : Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi $\mathscr{B}(n,p)$. Alors

$$E(S_n) = np \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(S_n) = np(1-p) = npq.$$

démonstration : *On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\mathscr{L}(X_i) = \mathscr{B}(p)$.*

Espérance : *Puisque l'espérance est linéaire, on a directement que*

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Variance : *Puisque les X_i sont deux à deux indépendants, la variance devient linéaire, de sorte que*

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p) = npq.$$

■

7.3 A la calculatrice…

Avec la TI Voyage 200, nous allons simuler le schéma de Bernoulli introduit précédemment grâce au tableur (« Cell-sheet »). On rappelle l'expérience et les résultats théoriques : on lance un dé 10 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est de $p = 1 - (\frac{5}{6})^1 0 \approx 0,84$. Voici la marche à suivre (des captures d'écran sont sur la page suivante — une capture par étape — afin de mieux comprendre) :

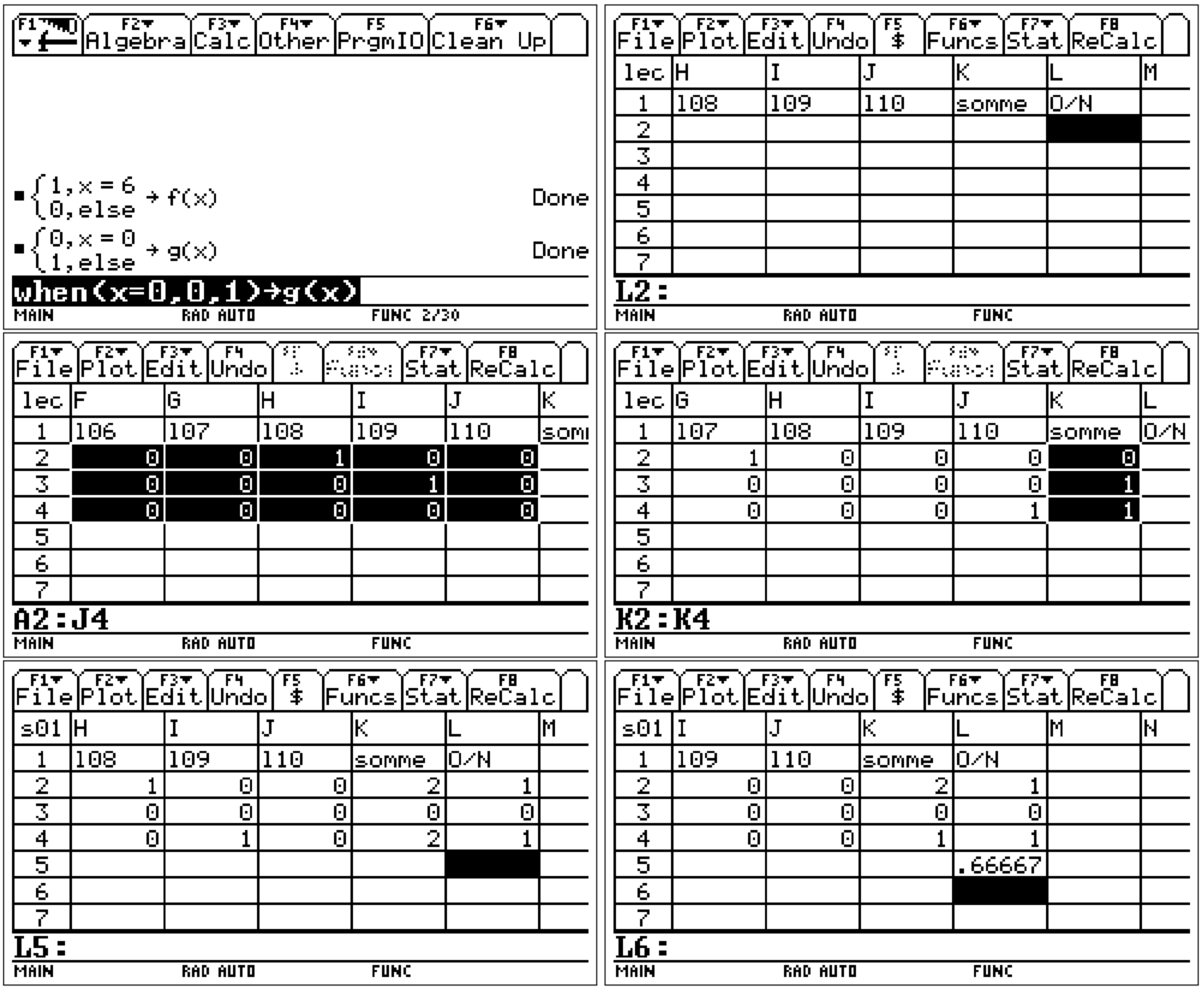
1. Dans l'écran **Home**, définir les fonctions suivantes :
   – la fonction qui renvoie 1 lorsque l'argument qu'on lui donne vaut 6, et 0 sinon :

$$\text{when}(x = 6, 1, 0) \rightarrow f(x)\ ;$$

– la fonction qui renvoie 0 lorsque l'argument qu'on lui donne vaut 0, et 1 sinon :

$$\text{when}(x = 0, 0, 1) \to g(x).$$

2. Dans le tableur, donnez des titres à vos colonnes (ici, les colonnes A à J nous servirons à matérialiser les 10 lancers[1] ; nous les mettons en colonne pour pouvoir faire une seconde, puis une troisième expérience de ce schéma de Bernoulli, que nous transcrirons donc dans les deux lignes 2 et 3 [la 1 concernant notre premier essai]) : par exemple, « $\ell 1$ » pour la colonne A, …, « $\ell 10$ » pour la J, « somme » pour la colonne K, où l'on comptera le nombre de 6 apparus, et « O/N » pour la colonne L, où l'on mettra 0 s'il n'y a pas de 6 et 1 s'il y en a au moins un dans la ligne.
3. Pour entrer la même formule dans une plage de cases, aller dans **Edit** (F3), puis **Fill range** (3) pour introduire notre formule après le = de la ligne **Formula**, qui sera **f(rand(6))**. Une fois effectué, modifier la ligne **Range** de sorte à mettre dedans notre plage : **A2 :J4**
4. Entrer la formule **:= A2+B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2** dans la plage **K2 :K4** de la même manière.
5. Entrer la formule **:= g(K2)** dans la plage **L2 :L4**.
6. Pour calculer la fréquence, entrer la formule **:= sum(L2 :L4)/3** dans la case **L5**.
7. Pour refaire la simulation, faire **Recalc** (F8).



[1] : Pour ce faire, encadrez votre texte de guillemets (") avant de valider, sinon la calculatrice ne saura pas que c'est du texte.

Fréquence d'apparition des 6

Pour 3 expériences de ce schéma de Bernoulli, on trouve $\frac{2}{3} \approx 0,6667$.
Pour 10 expériences (il faudrait donc rajouter 7 lignes), on trouve $\frac{8}{10} = 0,8$.
Pour 100 expériences, on trouve $\frac{81}{100} = 0,81$.
Pour 1000 expériences, on trouve $\frac{819}{1000} = 0,819$.

Plus le nombre d'expérience est grand, plus la fréquence d'appartition des 6 se rapproche de p (on rappelle que dans notre exemple, $p \approx 0,84$, ce qui illustre bien le théorème suivant :

Théorème 5 (inégalité de Tchebychev) : Soient $\varepsilon > 0$, $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$