

# LEÇON N° 15 :

## Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Nombres décimaux, développement décimal d'un nombre rationnel.

### Pré-requis :

- Relations d'équivalence, ensembles quotient, PGCD, théorème de Gauss ;
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable ;
- Ensemble  $\mathbb{N}$  et anneau  $\mathbb{Z}$  (en particulier que  $\mathbb{Z}$  est bien ordonné) ;
- Système de numération en base 10 (existence et unicité de l'écriture d'un entier en base 10 connue comme conséquence fondamentale de l'existence d'une division euclidienne dans  $\mathbb{N}$ ).

Si  $a, b \in \mathbb{Z}$ , on sait que l'équation  $ax = b$  n'admet dans  $\mathbb{Z}$  qu'une solution lorsque  $a|b$ . On souhaiterait donc étendre cet ensemble de solutions aux cas où  $a$  ne diviserait pas  $b$ . Le but de cette leçon va donc être la construction d'un corps commutatif contenant  $\mathbb{Z}$  et dans lequel l'équation  $ax = b$  admette une solution.

### 15.1 Construction de $\mathbb{Q}$

**Définition 1 :** Soient  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . On définit la relation  $\mathcal{R}$  par

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

**Proposition 1 :**  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

*démonstration :*

**Réflexivité :**  $ab = ba$ , donc  $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$ .

**Symétrie :**  $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow bc = ad \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d) \mathcal{R} (a, b)$ .

**Transitivité :** On suppose  $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$  et  $(c, d) \mathcal{R} (e, f)$ , c'est-à-dire  $ad = bc$  (†) et  $cf = de$  (‡).

Si  $c = 0$ , alors  $a = e = 0$  (car  $\mathbb{Z}$  est intègre, et  $b, d \neq 0$ ), donc  $af = 0 = be \Leftrightarrow (a, b) \mathcal{R} (e, f)$ .

Supposons alors  $c \neq 0$ . Le produit de (†) et (‡) donne  $a f c d = b c e d \Leftrightarrow a f = b e$  car  $\mathbb{Z}$  intègre et  $c, d \neq 0 \Rightarrow cd \neq 0$ . D'où  $(a, b) \mathcal{R} (e, f)$ .

$\mathcal{R}$  vérifie les trois points de la définition d'une relation d'équivalence. ■

**Définition 2 :** Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . La classe d'équivalence de  $(a, b)$  est appelée *nombre rationnel*. On la note  $\frac{a}{b}$  ou  $a/b$ , et  $a$  (resp.  $b$ ) est appelé *numérateur* (resp. *dénominateur*). Enfin, l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$  est appelé *ensemble des nombres rationnel*, et sera noté  $\mathbb{Q}$ .

Remarque 1 : Pour tout  $c \in \mathbb{Z}^*$ ,  $(a, b) \mathcal{R} (ca, cb)$ , c'est-à-dire  $\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$ .

**Proposition 2 :** Pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ , il existe un unique couple  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que

$$r = \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1.$$

Dans ce cas,  $r = a/b$  est appelée *fraction irréductible*.

**démonstration :**

**Existence :** Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . Il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  tel que  $r = a/b$ . On peut se ramener à  $b \in \mathbb{N}^*$  en posant  $a = -a$  et  $b = -b$  puisque  $(a, b) \mathcal{R} (-a, -b)$  d'après la remarque. Soit alors  $d = |a| \wedge b$ . Alors il existe  $a', b'$  tels que  $a = da'$  et  $b = db'$  avec  $a' \wedge b' = 1$ , d'où

$$r = \frac{a}{b} = \frac{da'}{db'} \stackrel{r_1}{=} \frac{a'}{b'},$$

avec  $(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .

**Unicité :** Soit  $r = a/b = c/d$ , avec  $a \wedge b = c \wedge d = 1$ . Or  $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$ , et d'après le théorème de Gauss, on a d'une part que  $d|bc$  et  $c \wedge d = 1 \Rightarrow d|b$ , et d'autre part  $b|ad$  et  $a \wedge b = 1 \Rightarrow b|d$ . Au final,  $b = d$  car ils sont tous les deux éléments de  $\mathbb{N}^*$ , et il en découle que  $a = c$ . Les deux fractions sont les mêmes.

L'unicité justifie alors la définition de fraction irréductible. ■

## 15.2 Structure de corps de $\mathbb{Q}$

On munit  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  de deux lois de composition internes définies pour tous éléments  $(a, b)$  et  $(c, d)$  de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  par

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (ad + bc, bd), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac, bd). \end{aligned}$$

Remarque 2 :  $b, d \neq 0$  par hypothèse, et  $\mathbb{Z}$  intègre impliquent que  $bd \neq 0$ .

**Proposition 3 :** Ces deux lois sont compatibles avec  $\mathcal{R}$ .

**démonstration :** Soient  $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$  et  $(a', b') \mathcal{R} (c', d') \Leftrightarrow a'd' = b'c'$  (notons ces deux égalités (b)). Alors on a que

$$\begin{aligned} (ab' + a'b) dd' &= adb'd' + bda'd' \stackrel{(b)}{=} bcb'd' + bdb'c' = bb'(cd' + c'd) \\ \Leftrightarrow (ab' + a'b, bb') &\mathcal{R} (cd' + c'd, dd') \\ \Leftrightarrow ((a, b) + (a', b')) &\mathcal{R} ((c, d) + (c', d')) \end{aligned}$$

pour ce qui concerne l'addition. Pour la multiplication, on a

$$\begin{aligned} aa'dd' &= ada'd' \stackrel{(b)}{=} bcb'c' = bb'cc' \\ \Leftrightarrow (aa', bb') &\mathcal{R} (cc', dd') \\ \Leftrightarrow ((a, b) \cdot (a', b')) &\mathcal{R} ((c, d) \cdot (c', d')), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

**Définition 3 :** Ces deux lois, notés  $+_{\mathbb{Q}}$  et  $\cdot_{\mathbb{Q}}$  sont appelées *addition et multiplication sur  $\mathbb{Q}$* . On les notera plus simplement  $+$  et  $\cdot$  lorsqu'il n'y a pas confusion.

**Théorème 1 :**  $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}})$  est un corps commutatif.

**démonstration :**

- a) Ces deux lois sont associatives et commutatives.
- b)  $\cdot$  est distributive par rapport à  $+$ . En effet,

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) + (c', d')) &= (a, b) \cdot (cd' + c'd, dd') \\ &= (acd' + ac'd, bdd') \\ (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (c', d') &= (ac, bd) + (ac', dd') \\ &= (abcd' + abdc', bdd') \stackrel{b \neq 0}{=} (acd' + adc', bdd'), \end{aligned}$$

et ces deux quantités sont bien égales.

- c)  $+$  admet  $\frac{0}{1}$  comme élément neutre, et  $\cdot$  admet  $\frac{1}{1}$  comme élément neutre. Ils sont uniques en vertu de la proposition 3.
- d)  $\frac{-a}{b}$  est l'inverse de  $\frac{a}{b}$  pour l'addition (en effet,  $(a, b) + (-a, b) = (ab - ab, b^2) = (0, 1)$ ) et  $\frac{b}{a}$  en est l'inverse pour la multiplication (en effet,  $(a, b) \cdot (b, a) = (ab, ab) = (1, 1)$ ).

$\mathbb{Q}$  est donc bien un corps, commutatif puisque ses lois le sont. ■

## Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

**Proposition 4 :** L'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}) \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux injectif.

**démonstration :**

- a)  $\varphi(\text{élément neutre de } +_{\mathbb{Z}}) = \varphi(0) = \frac{0}{1} = \text{élément neutre de } +_{\mathbb{Q}}$ . De même,  $\varphi(\text{élément neutre de } \cdot_{\mathbb{Z}}) = \varphi(1) = \frac{1}{1} = \text{élément neutre de } \cdot_{\mathbb{Q}}$
- b)  $\varphi(a + b) = \frac{a+b}{1} = a \cdot 1 + b \cdot 1 \cdot 1 = \frac{a}{1} +_{\mathbb{Q}} \frac{b}{1} = \varphi(a) +_{\mathbb{Q}} \varphi(b)$

$$c) \varphi(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

$$d) \varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b.$$

On en déduit que  $\varphi$  est bien un morphisme d'anneaux injectif. ■

**Conséquence :** On identifie  $\mathbb{Z}$  à  $\varphi(\mathbb{Z})$  dans  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire qu'on notera simplement l'élément  $a/1$  de  $\mathbb{Q}$  sous la forme  $a$ . Revenons alors au problème en introduction :

$$ax = b \Leftrightarrow \frac{a}{1} \cdot x = \frac{b}{1} \Leftrightarrow x = \left(\frac{a}{1}\right)^{-1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q},$$

et le corps ainsi créé correspond bien à ce qu'on attendait de lui.

### 15.3 $\mathbb{Q}$ bien ordonné

**Définition 4 :** On définit  $\mathbb{Q}^+ = \{a/b, ab \geq 0\}$  et  $\mathbb{Q}^- = \{a/b, ab \leq 0\}$ . Si  $r \in \mathbb{Q}^+$  (resp.  $\mathbb{Q}^-$ ), on dit que  $r$  est positif (resp. négatif).

**Proposition 5 :**

- (i)  $\mathbb{Q}^+$  et  $\mathbb{Q}^-$  sont stables par addition ;
- (ii) Si  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$  (ou  $\mathbb{Q}^-$ ), alors  $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}^+$ , et si  $r_1 \in \mathbb{Q}^+, r_2 \in \mathbb{Q}^-$ , alors  $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}^-$  ;
- (iii)  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$  et  $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$ .

**démonstration :**

- (i)  $r_1 + r_2 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$ , qui est du signe de  $a_1 b_1 b_2^2 + a_2 b_1^2 b_2$ , positif par hypothèse si  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$  et négatif si  $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^-$ .
- (ii) On montre juste le premier cas.  $r_1 \cdot r_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ , qui est du signe de  $a_1 a_2 b_1 b_2$ , c'est-à-dire positif, par hypothèse.
- (iii)  $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$ , donc  $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$ . Réciproquement, soit  $r = a/b$  est un élément de  $\mathbb{Q}$ . Si  $a \geq b$ , alors  $r \in \mathbb{Q}^+$  et sinon,  $r \in \mathbb{Q}^-$ . D'où  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ . Enfin,  $r \in \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- \Rightarrow ab \geq 0$  et  $ab \leq 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$ .

La dernière implication est justifiée par le fait que  $b \neq 0$  (d'après la définition d'un nombre rationnel) et que  $\mathbb{Z}$  est intègre. ■

**Proposition 6 :** La relation définie pour tout  $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$  par  $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^+$  est une relation d'ordre totale sur  $\mathbb{Q}$ . Elle est compatible avec  $+$  et  $\cdot$  pour  $r \in \mathbb{Q}^+$ .

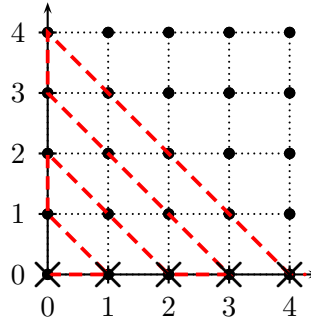
**démonstration :** Cette relation est clairement réflexive et transitive. Elle est totale car  $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$ . En effet, si  $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^+$ , alors  $r_2 \geq r_1$ , sinon on a  $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}^+$ , donc  $r_1 \geq r_2$ . ■

**Proposition 7 :**  $\mathbb{Q}$  est dénombrable.

**démonstration** : Soit  $r \in \mathbb{Q}, r = a/b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $a \wedge b = 1$ . L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ r &\longmapsto (a, b) \end{aligned}$$

est injective.  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$  sont dénombrables, donc  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  aussi, et donc  $\mathbb{Q}$  aussi.



■

**Définition 5** : Soit  $r \in \mathbb{Q}$ . On définit la valeur absolue de  $r$ , notée  $|r|$ , par

$$|r| = \begin{cases} r & \text{si } r \in \mathbb{Q}^+, \\ -r & \text{si } r \in \mathbb{Q}^-. \end{cases}$$

**Proposition 8** : La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes ( $r, p \in \mathbb{Q}$ ) :

- (i)  $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$  et  $|r| \geq 0$  ;
- (ii)  $|p + r| \leq |p| + |r|$  ;
- (iii)  $|pr| = |p| |r|$ .

**démonstration** : Séparer les cas : distinguer  $r$  positif ou négatif pour (i) ;  $p, r \in \mathbb{Q}^+, p, r \in \mathbb{Q}^-$  et  $p \in \mathbb{Q}^+, r \in \mathbb{Q}^-$  pour (ii) et (iii). ■

### Prolongement

Nous savons désormais résoudre les équations du type  $ax = b$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . Mais qu'en est-il des équations du type  $x^2 = a, a \in \mathbb{Z}$  ? Les solutions sont-elles toutes contenues dans le corps que nous venons de construire ?

Etudions par exemple de plus près l'équation  $x^2 = 2$ , et montrons que sa solution n'est pas un nombre rationnel. Supposons le contraire, de sorte qu'elle s'écrive sous la forme  $x = a/b$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  et  $a \wedge b = 1$ , et où  $x$  est tel que  $x^2 = 2$ . Alors

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2|a^2 \Rightarrow 2|a.$$

$a$  s'écrit donc sous la forme  $a = 2a'$ . Mais alors on a aussi

$$4a'^2 = 2b^2 \Rightarrow 2a'^2 = b^2 \Rightarrow 2|b^2 \Rightarrow 2|b,$$

donc  $b$  peut aussi s'écrire sous la forme  $b = 2b'$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $a/b$  soit une fraction irréductible.

L'« agrandissement » de ce corps, dans lequel ce type d'équation trouvera des solutions, sera l'objet d'une autre leçon. Il s'agit du corps des réels.

## 15.4 Définition de $\mathbb{D}$ et premières propriétés

**Définition 6 :** Un nombre rationnel  $d$  est dit *décimal* s'il existe deux entiers  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$d = \frac{m}{10^n}.$$

On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble de ces nombres décimaux.

**Conséquence immédiate :**  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

**Proposition 9 :** Soit  $x = a/b$  un élément de  $\mathbb{Q}$ , avec  $a$  et  $b$  premiers entre eux. Alors  $x$  est décimal si et seulement s'il existe deux entiers naturels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $b = 2^\alpha 5^\beta$ .

*démonstration :*

" $\Rightarrow$ " Supposons que l'élément  $x \in \mathbb{Q}$  soit décimal. Par définition, il existe deux entiers  $m \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $x = \frac{a}{b} = \frac{m}{10^n}$ . D'où  $a 10^n = mb$ . Puisque  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, il vient par le théorème de Gauss que  $b$  divise  $10^n = 2^n 5^n$ , donc  $b$  est de la forme  $2^\alpha 5^\beta$ , avec  $\alpha, \beta \leq n$ .

" $\Leftarrow$ " Supposons maintenant qu'il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  tels que  $b = 2^\alpha 5^\beta$ . Distinguons alors trois cas :

- Si  $\alpha = \beta$ , alors  $\frac{a}{b} = \frac{a}{10^\alpha}$ ,
- Si  $\alpha > \beta$ , alors  $\frac{a}{2^\alpha 5^\beta} = \frac{a 5^{\alpha-\beta}}{10^\alpha}$ ,
- Si  $\alpha < \beta$ , alors  $\frac{a}{2^\alpha 5^\beta} = \frac{a 2^{\beta-\alpha}}{10^\beta}$ .

Dans les trois cas, on se ramène à la définition pour conclure que  $x \in \mathbb{D}$ . ■

**Théorème 2 :**  $(\mathbb{D}, +, \cdot)$  est un sous-anneau de  $\mathbb{Q}$ .

*démonstration :* La conséquence ci-dessus nous assure déjà que  $\mathbb{D}$  n'est pas vide. Soient alors  $d = m/10^n$  et  $d' = m'/10^{n'}$  deux éléments de  $\mathbb{D}$ . On a alors

$$d + d' = \frac{m}{10^n} + \frac{m'}{10^{n'}} = \frac{m 10^{n'} + m' 10^n}{10^{n+n'}} \in \mathbb{D},$$

$$d \cdot d' = \frac{m}{10^n} \cdot \frac{m'}{10^{n'}} = \frac{mm'}{10^{nn'}} \in \mathbb{D}.$$

D'où le résultat. ■

Remarques 3 :

- L'élément  $3 \in \mathbb{D}$  n'admet pas d'inverse pour la loi  $\cdot$ . En effet,  $1/3 \notin \mathbb{D}$ , et on en déduit que  $(\mathbb{D}, +, \cdot)$  n'a pas de structure de corps ;
- Un nombre décimal  $d$  est inversible si et seulement s'il est de la forme  $d = \pm 2^\alpha 5^\beta$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  (conséquence de la proposition 1).

## 15.5 Approximation d'un rationnel

**Théorème 3 :** Soient  $x \in \mathbb{Q}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe un unique entier relatif  $p_n = [10^n x]$  tel que

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}. \quad (15.1)$$

*démonstration :* En effet,

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n} \Leftrightarrow p_n \leq 10^n x < p_n + 1 \Leftrightarrow p_n = [10^n x].$$

Remarquons que le rationnel  $10^n x$  est encadré par deux entiers consécutifs, et l'inégalité telle quelle suggère que l'unique entier (membre de gauche) en question est la partie entière du rationnel. ■

**Définition 7 :** Le nombre  $p_n/10^n$  est appelée *valeur décimale approchée par défaut de  $x$  à  $10^{-n}$  près*, et  $(p_n + 1)/10^n$  sera appelé *valeur décimale approchée par excès de  $x$  à  $10^{-n}$  près*.

**Corollaire 1 :**  $\mathbb{D}$  est dense dans  $\mathbb{Q}$ .

*démonstration :* La double inégalité

$$\frac{p_n}{10^n} \leq \frac{a}{b} < \frac{p_n + 1}{10^n} \Leftrightarrow b p_n \leq a 10^n < b(p_n + 1)$$

exprime que  $b p_n$  est le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ , d'où l'existence et l'unicité. La suite est une copie de la démonstration du théorème précédent. ■

**Théorème 4 :** Soit  $x \in \mathbb{Q}^+$ . Il existe une unique suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'entiers naturels telle que :

- (i)  $\forall n \geq 1, a_n \in \{0, \dots, 9\}$  et  $a_0 \in \mathbb{Z}$ ,
- (ii) Il n'existe pas d'entier naturel  $N$  tel que pour tout  $n > N, a_n = 9$ ,
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

*démonstration :* Soit  $u_n$  la valeur décimale approchée par défaut de  $x$  à  $10^{-n}$  près. La double inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Soit  $m = u_n 10^n \in \mathbb{N}$ . Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans  $\mathbb{N} \times [0 \dots 9]^n$ , par unicité de l'écriture en base 10.

Montrons encore que les coefficients  $a_i$  sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que  $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont les mêmes au rang  $n$  et  $n+1$ . Supposons qu'on ait au rang  $n+1$  la double-inegalité

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque  $b_{n+1} \leq 9$ , on aura nécessairement  $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{1}{10^n}$ , et notre double-inegalité devient

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leq x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

L'unicité de la solution  $(a_0, \dots, a_n)$  de la relation du (iii) au rang  $n$  nous permet d'affirmer que pour tout  $i \in [0 \dots n]$ ,  $a_i = b_i$ .

Supposons enfin qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que tout  $n \geq N$  vérifie  $a_n = 9$ . Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissances de 10, on est ramené à étudier le cas particulier  $0,99\bar{9} \dots$ . Or

$$0,99\bar{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1,$$

et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout  $n$  alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. ■

**Définition 8 : Dans ce cas, par passage à la limite,**

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

**et l'on dit que c'est le développement décimal illimité (noté par la suite DDI) propre de  $x$ , et on note de manière plus commode  $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$**

Remarques 4 :

- Un développement décimal illimité est dit impropre s'il ne vérifie pas le théorème 4. Par exemple,  $1 = 1,00\bar{0} = 0,99\bar{9}$ . Le premier est propre, le second est impropre ;
- Si  $x \in \mathbb{Q}^-$ , on détermine alors le DDI propre de  $-x \in \mathbb{Q}^+$ , par exemple  $-x = x_0, x_1 x_2 \dots$ . L'on pose alors  $x = -x_0, x_1 x_2 \dots$

## Compléments et prolongements possibles

### 15.5.1 Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

**Proposition 10 :  $\mathbb{R}$  est non dénombrable.**

**démonstration :** Supposons que  $\mathbb{R}$  soit dénombrable. On aurait alors l'égalité  $[0, 1] = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  où  $x_i = 0, a_{i,1}a_{i,2} \dots$ . Soit alors  $x = 0, b_1b_2 \dots$  un réel tel que  $b_i \neq a_{i,i}$  pour tout entier naturel  $i \geq 1$  (facile à construire !). Alors l'égalité  $x = x_i$  entraîne nécessairement  $b_n = a_{i,n}$  pour tout  $n \geq 1$ . En particulier, lorsque  $n = i$ , on aura  $b_i = a_{i,i}$ , ce qui est contradictoire. Ainsi  $[0, 1]$ , et  $\mathbb{R}$  par extension, n'est pas dénombrable. ■

### 15.5.2 Théorème de la borne supérieure

Le DDI propre d'un réel peut être utilisé pour introduire axiomatiquement le corps des réels. Encore faut-il montrer la célèbre théorème de la borne supérieure !!!

**Lemme :** On a l'équivalence suivante

$$a_0, a_1a_2 \dots < b_0, b_1b_2 \dots \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} a_i = b_i, \forall i \in [0, k-1], \\ a_k < b_k. \end{cases}$$

**démonstration :**

" $\Leftarrow$ " Soient  $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \dots$  et  $y = a_0 + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \dots$ . Alors  $x < \xi$ , où

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \left( \frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \dots \right) \quad (\text{car } a_i < b_i \leq 9 \text{ pour } i \in \mathbb{N}) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \\ &\leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} \leq y. \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ " Posons  $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq b_i\}$ . Alors  $a_k > b_k$  ou  $a_k < b_k$ . Supposons que ce soit le premier cas, alors

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \dots &\leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \left( \frac{9}{10^{k+1}} + \dots \right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \\ &\leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} \\ &\leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} + \dots \end{aligned}$$

En reprenant les notations précédentes, on aurait  $y \leq x$ , ce qui est absurde. Au final, on a bien  $a_k < b_k$ . ■

**Théorème 5 :** Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée possède une borne supérieure.

**démonstration** : Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}^+$  non vide et majorée, de majorant  $M$ . Considérons l'ensemble  $E_0 = \{[x], x \in A\}$ .  $A$  étant non vide, il contient au moins un élément  $x$  dont on peut extraire la partie entière, et il vient que  $E_0$  n'est pas vide. C'est une partie incluse dans  $\mathbb{N}$  et majorée par  $M$  (en effet, si  $x = M$ , alors  $[x] = M$ ), donc possède un plus grand élément que l'on note  $s_0$ .

Considérons maintenant l'ensemble  $E_1 = \{a_1 \in [0 \dots 9] \mid x = s_0, a_1 a_2 a_3 \dots\}$  (non vide car  $A$  n'est pas vide implique que tout  $x$  de  $A$  possède un DDI), qui est une partie de  $\mathbb{N}$  majorée par 9, et possède donc un plus grand élément noté  $s_1$ .

On montre ainsi que pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble  $E_n$  construit par récurrence par  $E_n = \{a_n \in [0 \dots 9] \mid x = s_0, s_1 \dots s_{n-1} a_n a_{n+1} \dots\}$  possède un plus grand élément noté  $s_n$ , et l'on aboutit ainsi à  $x = s_0, s_1 \dots s_n \dots$ . C'est le lemme précédent qui nous assure que ce nombre  $s_0, s_1 \dots s_n \dots$  est la borné supérieure recherchée. ■