

LEÇON N° 16 :

Construction du corps \mathbb{C} des complexes. Propriétés.

Pré-requis :

- Notions d'anneaux, de corps ;
- Résolution des équations du second degré ;
- (Théorème de Liouville).

16.1 Introduction historique

Bien que les nombres complexes soient introduits au lycée immédiatement après la résolution des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (pour tous $a \neq 0$, b et c réels), leur invention n'est pas due à cela. Elle vient en fait d'algébristes du XI^e siècle tentant de résoudre les équations du troisième degré. En effet, après avoir transformé l'équation $x^3 + bx + cx + d = 0$ en $X^3 + pX + q = 0$ par la translation $X = x + \frac{b}{3}$, les italiens déterminent que (formule dite de Cardan)

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}$$

Mais lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$, l'équation $X^2 + pX + q = 0$ admet 3 racines réelles (étudier la fonction $X \mapsto X^3 + pX + q$ pour s'en convaincre), ce qui bloquait longtemps les algébristes. Bombelli élucida alors ce cas en introduisant ce que l'on note aujourd'hui i et $-i$ (notation en vigueur depuis Gauss : à l'époque, ils écrivaient $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$).

16.2 Construction de \mathbb{C}

Théorème 1 : $(\mathbb{R}^2, +, \times)$, dont les lois sont définies pour tous couples (a, b) et (a', b') de \mathbb{R}^2 par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'),$$

est un corps commutatif.

démonstration : Il est immédiat de vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau, d'élément neutre $(0, 0)$ et d'élément unité $(1, 0)$. C'est de plus un corps car $(a, b) \neq (0, 0)$ admet pour inverse

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

La commutativité est elle aussi évidente considérant la loi ci-dessus. ■

Proposition 1 : L'application

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto (a, 0)\end{aligned}$$

est un isomorphisme du corps \mathbb{R} sur $\pi(\mathbb{R})$.

démonstration : La surjectivité est immédiate. Il est de plus évident que $a \neq b \Rightarrow (a, 0) \neq (b, 0)$, donc $\pi(a) \neq \pi(b)$. ■

Conséquences :

1. Par identification, on notera désormais a à la place $(a, 0)$ pour tout réel a .
2. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda(a, b) = (\lambda, 0) \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.
3. On remarque que $-1 = (-1, 0) = (0, 1) \cdot (0, 1)$, donc -1 est bien un carré dans $(\mathbb{R}^2, +, \times)$.
4. En posant $(0, 1) = i$, on a alors pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \stackrel{2.}{=} a + b \cdot (0, 1) = a + bi.$$

5. Si $\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, alors l'application

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}^2, +, \times) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x + iy\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

démonstration : Par définition de \mathbb{C} , la surjectivité est immédiate. Supposons alors $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) = 0$. Si $y_1 - y_2 \neq 0$, alors $i = -(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1} \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que -1 n'est pas un carré dans \mathbb{R} , donc $y_1 = y_2$ et $x_1 = x_2$. ■

Définition 1 : On pose alors $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cong (\mathbb{R}^2, +, \times)$, appelé **corps des nombres complexes**. Ainsi,

$$\mathbb{C} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

où i est tel que $i^2 = -1$.

Proposition 2 : Soient $x + iy$ et $x' + iy'$ deux éléments de \mathbb{C} . Alors :

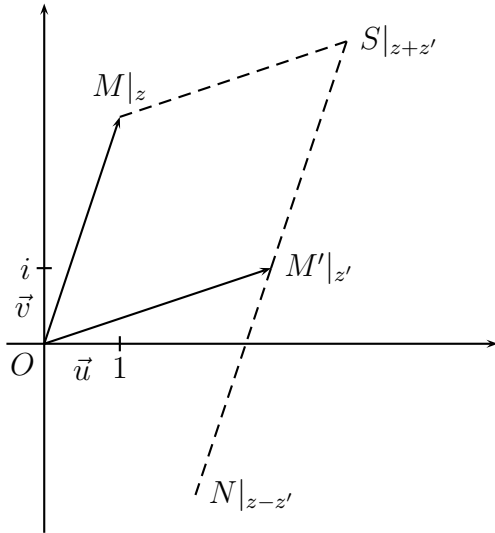
- (i) $(x + iy = x' + iy') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$;
- (ii) $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$;
- (iii) $(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$;
- (iv) $i^2 = -1$.

démonstration : Ces propriétés de \mathbb{C} se déduisent de sa construction ci-dessus. ■

16.3 Les nombres complexes

16.3.1 Représentation géométrique et définitions

Soit \mathcal{P} le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .



Définition 2 :

- ◇ $M = (x, y)$ est appelé *image* du nombre complexe $m = x + iy$. On le note $M|_m$ ou $M(m)$. Réciproquement, m est appelé *affiche* du point M .
- ◇ Pour tous $M|_z$ et $M'|_{z'}$, le point $N|_{z-z'}$ est tel que $\vec{MM'} = \vec{ON}$. On dit que $z - z'$ (l'affiche de N) est aussi l'affiche de $\vec{MM'}$. z est donc également l'affiche de \vec{OM} .

Remarque 1 : L'addition dans \mathbb{C} s'interprète comme l'addition vectorielle.

16.3.2 Définitions et propriétés

On se donne un nombre complexe $z = a + ib$.

Définition 3 :

- a est la *partie réelle* de z , notée $\Re(z)$. b est la *partie imaginaire* de z , notée $\Im(z)$;
- Le nombre complexe $a - ib$ est appelé *conjugué* de z , noté \bar{z} (donc en particulier, $\overline{\bar{z}} = z$) ;
- Le réel positif $\sqrt{z \bar{z}}$ est appelé *module* de z , noté $|z|$.

Remarques 2 :

1. $z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \geq 0$, donc $|z|$ est bien défini. Notons que le module coïncide avec la valeur absolue dans \mathbb{R} .
2. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z} \end{aligned}$$

est un morphisme de corps, d'où

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad ; \quad \overline{-z} = -\bar{z} \quad ; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'} \quad ; \quad z \neq 0 \Rightarrow \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

3. Géométriquement, l'application $z \longmapsto \bar{z}$ est la réflexion par rapport à l'axe réel (O, \vec{u}) .

Lemme : Si $Z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions opposées dans \mathbb{C} .

démonstration : Cherchons s'il existe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} ((x + iy)^2 = a + ib) &\stackrel{\text{prop 2(i)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \\ y = \pm \text{signe}(b) \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \text{signe}(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b > 0 \\ 0 & \text{si } b = 0 \\ -1 & \text{si } b < 0 \end{cases}. \text{ Le résultat s'en déduit alors.} \quad \blacksquare$$

Théorème 2 : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Alors l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions dans \mathbb{C} , données par :

(i) Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = \frac{b}{2a}$;

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a},$$

où δ est tel que $\delta^2 = \Delta$.

démonstration :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a} \right)^2 \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left(z - \frac{-b + \delta}{2a} \right) \left(z - \frac{-b - \delta}{2a} \right). \end{aligned}$$

Si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ et $z_1 = z_2 = \frac{b}{2a}$. Sinon, le lemme assure que δ tel que $\delta^2 = \Delta$ existe, et dès lors, on a :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}. \quad \blacksquare$$

Théorème 3 (fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert) : Toute fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet n racines dans \mathbb{C} (comptées avec leurs multiplicités).

démonstration : On rappelle le théorème de Liouville et le vocabulaire qui va avec :

Théorème de Liouville : Toute fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analytique et bornée est constante.

Analytique : $\forall z_0 \in \mathbb{C}, f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$.

Bornée : $\exists M > 0 \mid |f(z)| < M (\forall z)$.

Montrons que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une racine. Supposons pour cela que P n'admette aucune racine et considérons la fonction $f = 1/P$. f est analytique et clairement bornée car $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f$ est constante. On note alors $f(z) = C$, ce qui implique $P \equiv \frac{1}{C} \rightarrow$ absurde, car $\deg(P) \geq 1$. D'où P admet au moins une racine z_0 . Par suite, il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(z) = (z - z_0) Q(z)$, et on réitère ce raisonnement au polynôme Q vérifiant $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Au final, P admet n racines (avec éventuellement égalités de plusieurs d'entre elles). ■

Remarque 3 : Si temps, poursuite avec module et argument, interprétation géométrique (cf. leçon n° 17).

Autres constructions possibles :

1. La construction donnée ici est historique, et il en existe d'autres. Par exemple, on considère $\mathbb{R}[X]$, $P(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ et $I = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Alors on a le théorème suivant :

Théorème : $\mathbb{R}[X]/I$ est un corps commutatif pour $+$ et \times . On note $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/I$.

Pour justifier la notation, on montre que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]/I) = 2$, et $x^2 = (x^2 + 1) \cdot 1 + (-1)$, donc $[x^2] = [x]^2 = -1$ (où $[x]$ désigne la classe de x), donc $[x]$ se comporte exactement comme i .

2. Les seuls automorphismes φ de \mathbb{C} dont la restriction à \mathbb{R} soit $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ sont $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ ou la conjugaison. En effet, $(\varphi(i))^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$, donc $\varphi(i) = \pm i$. Soit alors $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
 - Si $\varphi(i) = i$, $\varphi(a + ib) = \varphi(a) + \varphi(i)\varphi(b) = a + ib \Rightarrow \varphi \equiv \text{Id}_{\mathbb{C}}$;
 - Si $\varphi(i) = -i$, $\varphi(a + ib) = \varphi(a) + \varphi(i)\varphi(b) = a - ib \Rightarrow \varphi \equiv$ conjugaison.

Réciproquement, on vérifie que la conjugaison et $\text{Id}_{\mathbb{C}}$ sont des automorphismes de \mathbb{C} .