

LEÇON N° 17 :

Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

Pré-requis :

- Fonctions trigonométriques et applications, notions sur les lignes de niveaux ;
- Construction du corps \mathbb{C} (\Re , \Im , conjugaison, ...);
- Théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle au centre.

17.1 Module d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, \bar{z} son conjugué. Alors on constate que $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ est un nombre réel positif, nous permettant de donner la définition suivante :

Définition 1 : On appelle *module de z* le réel positif $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.

Remarque 1 : Si $b = 0$, alors $|z| = |a| = \sqrt{a^2}$. La notation est ainsi justifiée par extension de la notation "valeur absolue".

Proposition 1 :

1. $|z| \geq 0$ et ($|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$);
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$;
3. $|\Re(z)| \leq |z|$ (resp. $|\Im(z)| \leq |z|$) avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ (resp. $z \in i\mathbb{R}$);
4. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.^a En particulier,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda z| = |\lambda| |z|. \quad (\star)$$

Il en résulte que si $z_2 \neq 0$, on a $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, et donc ($z \neq 0$) $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$.

5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, avec égalité si et seulement si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ ou $z_1 = kz_2$, $k \in \mathbb{R}^+$ (géométriquement, c'est une propriété de la distance euclidienne dans \mathbb{R}^2);
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

^a : On remarquera que l'application $(\mathbb{C}, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, \cdot) : z \longmapsto |z|$, où \times (resp. \cdot) représente la multiplication dans \mathbb{C} (resp. dans \mathbb{R}), est un morphisme de groupes.

démonstration :

1. C'est la définition.

2. On a $|-z| = \sqrt{(-z)(-z)} = \sqrt{(-z)(-\bar{z})} = \sqrt{z\bar{z}} = |z|$ et $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{z}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$.

3. On a $|z| = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)} \leq \sqrt{\Re^2(z)} = \Re(z)$. L'égalité n'a lieu que lorsque $\Im^2(z) = 0 \Leftrightarrow \Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. De même, $|z| = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)} \leq \sqrt{\Im^2(z)} = \Im(z)$. L'égalité n'a lieu que lorsque $\Re^2(z) = 0 \Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

4. $\diamond |z_1 z_2| = \sqrt{z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1} \sqrt{z_2 \bar{z}_2} = |z_1| |z_2|$.

\diamond On choisit $z_1 = \lambda \in \mathbb{R}$, et le résultat en découle.

\diamond Démonstration analogue, puis $z_1 = 1$.

5. On a

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\stackrel{3.}{\leq} |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \stackrel{4.2.}{=} |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \stackrel{|\cdot| \geq 0}{\implies} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

Si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, l'égalité est immédiate. Sinon

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2| \stackrel{3.}{\Leftrightarrow} z_1 \bar{z}_2 \in \mathbb{R}^+ \\ &\Leftrightarrow z_1 = \frac{a}{z_2} = \frac{a z_2}{z_2 \bar{z}_2} = k z_2, \text{ où } k = \frac{a}{|z_2|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

6. Résulte de 5. En effet, $z_1 = z_1 + z_2 - z_2 \Rightarrow |z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$. De même, $z_2 = z_2 + z_1 - z_1 \Rightarrow |z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$. On en déduit le résultat attendu. ■

Remarques 2 :

- \diamond 1, ★ et 5 traduisent que le module est une norme ;
- \diamond 4 donne le théorème suivant :

Théorème 1 : L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif noté U , sous-groupe du groupe multiplicatif (\mathbb{C}, \times) . C'est le noyau du morphisme $z \mapsto |z|$ de (\mathbb{C}, \times) dans le sous-groupe multiplicatif (\mathbb{R}, \cdot) .

Conséquences :

- i. Dans le plan \mathcal{P} , l'image de U est le cercle trigonométrique (centre O , rayon 1) ;
- ii. $1, i, -1, -i$ sont des éléments remarquables de U .

17.2 Argument d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ d'image M dans le plan complexe \mathcal{P} muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) . Alors $z/|z| \in U$ et son image M' d'affixe $z/|z|$ est donc sur le cercle trigonométrique. Si θ est une mesure modulo 2π de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$, on a ainsi $z/|z| = \cos \theta + i \sin \theta$, avec

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Définition 2 : θ est appelé *argument de z* et est noté $\arg(z)$. La valeur de θ appartenant à $] -\pi, \pi]$ est appelé *argument principal de z* , noté $\text{Arg}(z)$.

Remarque 3 : 0 n'a pas d'argument.

17.2.1 Forme trigonométrique

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ est d'argument θ , alors z s'écrit sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Réciproquement, si $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\rho > 0$, alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta$.

Définition 3 : Une telle écriture, $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée *forme trigonométrique de z* .

17.2.2 Propriétés

Proposition 2 :

1. Si $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg(k) = 0 \pmod{2\pi}$. Si $k \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg(k) = \pi \pmod{2\pi}$;
2. $\arg(-z) = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$;
3. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$;
4. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$. En particulier,
 - ◇ $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C})$,
 - ◇ $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi} \quad (\forall z \in \mathbb{C})$,
 - ◇ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi} \quad (\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})$.

démonstration : Dans cette démonstration, nous supposons z écrit sous sa forme trigonométrique : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

1. ◇ $k \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow k = a > 0 \Leftrightarrow k = |a|(1 + 0i) \Leftrightarrow k = |k|(\cos 0 + i \sin 0) \Leftrightarrow \arg(k) = 0 \pmod{2\pi}$,
 ◇ $k \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow k = a < 0 \Leftrightarrow k = |a|(-1 + 0i) \Leftrightarrow k = |k|(\cos \pi + i \sin \pi) \Leftrightarrow \arg(k) = \pi \pmod{2\pi}$.
2. $-z = |z|(-\cos \theta - i \sin \theta) = |z|(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)) \Rightarrow \arg(-z) = \pi + \theta \pmod{2\pi} = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$.
3. $\bar{z} = |z|(\cos \theta - i \sin \theta) = |z|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \Rightarrow \arg(\bar{z}) = -\theta \pmod{2\pi} = -\arg(z) \pmod{2\pi}$.
4. ◇ On a

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\
 &= |z_1 z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)) \\
 &= |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\
 \Rightarrow \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi} = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

◇ *réurrence.*

◇ $z_1/z_2 = \dots$ (démonstration analogue), puis $z_1 = 1$. ■



Proposition 3 (Formule de Moivre) : Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

démonstration : Posons $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Alors $|z| = 1 \Rightarrow \arg(z) = \theta$ et on a aussi $|z^n| = |z|^n = 1$. Alors $\arg(z^n) \stackrel{3.}{=} n \arg(z) \pmod{2\pi} = n\theta \pmod{2\pi}$, d'où $z^n = |z^n|(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. ■

17.2.3 Notation exponentielle

Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longmapsto U \subset \mathbb{C} \\ \theta &\longmapsto \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$

φ vérifie alors :

- ▷ $\forall \theta \in \mathbb{R}, |\varphi(\theta)| = 1$, donc $\varphi(\theta) \neq 0$;
- ▷ $\varphi(\theta_1 + \theta_2) = \varphi(\theta_1) \varphi(\theta_2)$ (d'où en particulier $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(-\theta) = 1/\varphi(\theta)$);
- ▷ $\varphi'(\theta) = i\varphi(\theta)$.

Ces propriétés rappellent celles de la fonction exponentielle ($x \mapsto e^{\lambda x}$ est l'unique fonction y sur \mathbb{R} vérifiant $y \neq 0$, $y' = \lambda y$ et $y(0) = 1$), et conduisent naturellement à poser par convention $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$.

Proposition 4 :

1. **Formules d'Euler :** $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$;
2. **Formule de Moivre en écriture exponentielle :** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$;
3. $e^{i\theta} + 1 = 0$.

démonstration :

1. On a

$$\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta) = \cos \theta.$$

De même, on trouve que

$$\frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}(\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta) = \sin \theta.$$

2. C'est la formule de Moivre...

3. $e^{i\pi} + 1 = \cos \pi + i \sin \pi + 1 = 0$. ■

Définition 4 : Si $z \in \mathbb{C}^*$, de module ρ et d'argument θ , s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, alors cette écriture est appelée **écriture exponentielle de z** .

Remarque 4 : $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur (U, \times) , même un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), +)$ sur (U, \times) .

17.3 Interprétation géométrique

Soient (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé du plan complexe, $M(z), M'(z')$ deux points d'affixes z et z' .

17.3.1 Module

Proposition 5 : $d(M, M') = |z' - z|$.

démonstration : On a $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} \Rightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z$. On en déduit donc que $\|\overrightarrow{MM'}\| = d(M, M') = |z' - z|$. ■

Exercice : Calculer $|z + z'|^2 + |z - z'|^2$ et interpréter le résultat géométriquement dans un parallélogramme. En déduire la formule de la médiane.

17.3.2 Argument

Proposition 6 : $\arg(z' - z) = (\vec{u}, \overrightarrow{MM'}) \pmod{2\pi}$.

démonstration : $\arg(z' - z) = \arg(z_{\overrightarrow{MM'}})$. Il suffit donc de placer l'origine du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en O et d'appliquer la définition. ■

Corollaire : Soient $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points avec $a \neq b$. Alors

$$\arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}.$$

démonstration : On a

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) &= \arg(d - c) - \arg(b - a) \pmod{2\pi} \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi} \\ &= (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

17.4 Lignes de niveaux

Définition 5 : Soient $E \subset \mathbb{C}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. On appelle *ligne de niveau* k associé à f l'ensemble des points $M(z) \in \mathcal{P}$ tels que $f(z) = k$. On notera cet ensemble $L_k(k)$.

Voici quatre figures qui correspondront aux quatre propositions ci-dessous :

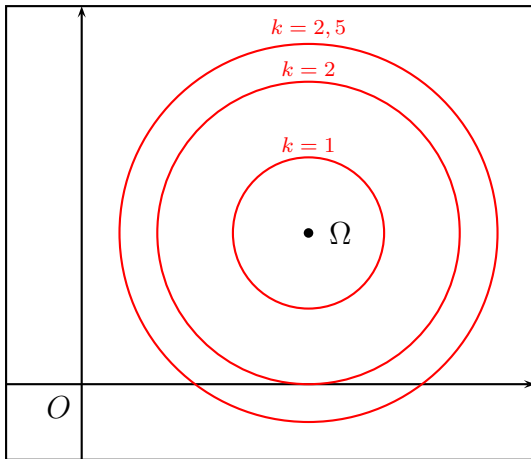


Figure 1 : $f(z) = |z - \omega|$

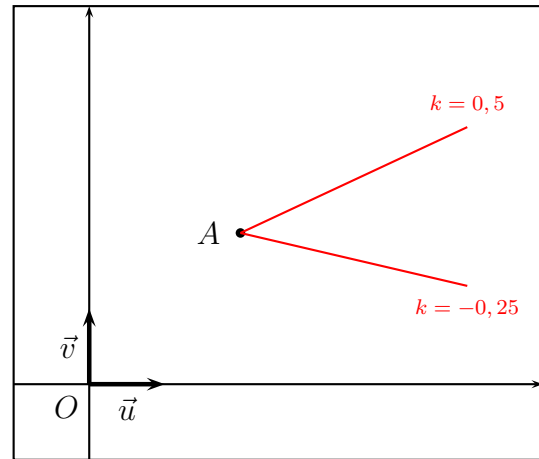


Figure 2 : $f(z) = \arg(z - a)$

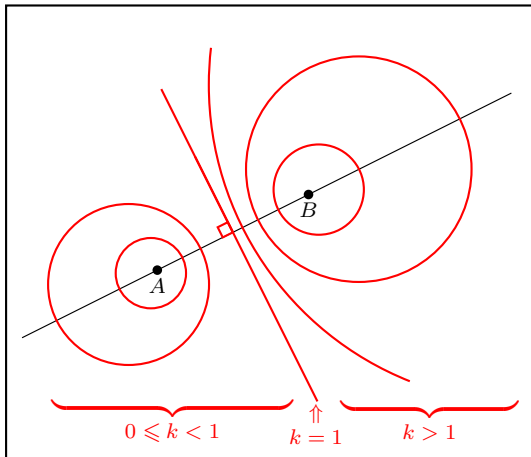


Figure 3 : $f(z) = \left| \frac{z-a}{z-b} \right|$

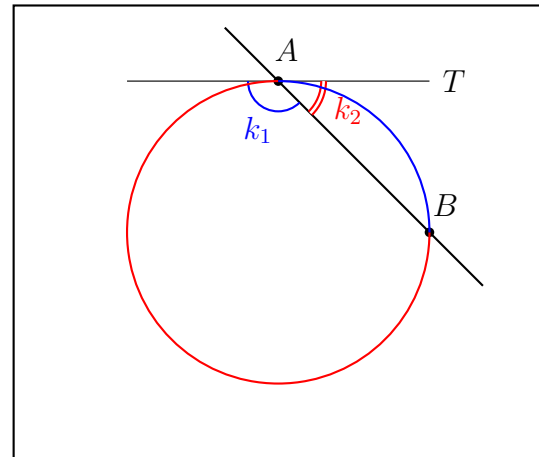


Figure 4 : $f(z) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

Proposition 7 (figure 1) : Soit $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z) = |z - \omega|$ pour tout point $\Omega(\omega) \in \mathcal{P}$. Alors

$$L_f(k) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k < 0 \\ \{\Omega\} & \text{si } k = 0 \\ \mathcal{C}(\Omega, k) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

démonstration : Si $k < 0$, le résultat est évident. Supposons alors $k = 0$. Alors $L_f(0) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| = 0\} = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid z = \omega\} = \{\Omega\}$. Enfin, si $k > 0$, alors $|z - \omega| = k \Leftrightarrow \Omega M = k \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(\Omega, k)$. ■

Proposition 8 (figure 2) : Soit $f : \mathcal{P} \setminus \{A\} \longrightarrow \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ la fonction définie par $f(z) = \arg(z - a)$, pour tout $A(a) \in \mathcal{P}$. Alors

$$L_f(k) = \Delta_A^+,$$

où Δ_A^+ désigne la demi-droite d'extrémité A (privée de A) admettant pour vecteur directeur le vecteur unitaire $\vec{\alpha}$ tel que $(\vec{u}, \vec{\alpha}) = k \pmod{2\pi}$.

démonstration : On a :

$$\begin{aligned} L_f(k) &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid \arg(z - a) = k\} \\ &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = k\} \quad \text{par la proposition 5} \\ &= \Delta_A^+, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 9 (figure 3) : Soit $f : \mathcal{P} \setminus \{B\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(z) = \left| \frac{z - a}{z - b} \right|$ pour tous points $A(a), B(b) \in \mathcal{P}$ tels que $a \neq b$. Alors

$$L_f(k) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } k < 0 \\ \{A\} & \text{si } k = 0 \\ \text{méd}([AB]) & \text{si } k = 1 \\ \mathcal{C}_{[IJ]} & \text{si } k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \end{cases}$$

où $\text{méd}([AB])$ désigne la médiatrice de $[AB]$, $\mathcal{C}_{[IJ]}$ le cercle de diamètre $[IJ]$, avec $I = \text{bar}\{(A, 1), (B, -k)\}$ et $J = \text{bar}\{(A, 1), (B, k)\}$.

démonstration : Les cas $k < 0$, $k = 0$ et $k = 1$ sont triviaux. Supposons alors $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - a}{z - b} \right| = k &\Leftrightarrow \frac{|z - a|}{|z - b|} = k \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = k \Leftrightarrow k^2 BM^2 - AM^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (k\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AM})(k\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{MI} (1 + k)\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0, \end{aligned}$$

donc M est sur le cercle de diamètre $[IJ]$. ■



Proposition 10 (figure 4) : Soit $f : \mathcal{P} \setminus \{B\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ la fonction définie par $f(z) = \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ pour tous points $A(a), B(b) \in \mathcal{P}$ tels que $a \neq b$. Alors

$$L_f(k) = \begin{cases} (AB) \setminus [AB] & \text{si } k = 0 \pmod{2\pi} \\]AB[& \text{si } k = \pi \pmod{2\pi} \\ \mathcal{A}_{A,B}^T & \text{si } k \neq 0 \pmod{\pi}, \end{cases}$$

où $\mathcal{A}_{A,B}^T$ désigne l'un des deux arcs ouverts d'extrémités A et B du cercle \mathcal{C} passant par ces deux points et admettant pour tangente en A la droite T telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = k \pmod{\pi}$.

démonstration : Les cas $k = 0 \pmod{2\pi}$ et $k = \pi \pmod{2\pi}$ sont évidents. Supposons alors $k \neq 0 \pmod{\pi}$. On rappelle que :

Théorème de l'angle au centre (★) : Pour tous points A, B, C d'un cercle \mathcal{C} de centre O , on a $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$.

Théorème de l'angle inscrit (▲) : Pour tous points A, B d'un cercle \mathcal{C} de centre O , et T un point de la tangente à \mathcal{C} en A , on a : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \pmod{\pi}$.

Alors

$$\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = k \stackrel{\text{covo}}{\Leftrightarrow} (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = k \stackrel{(\star) \Leftrightarrow (\blacktriangle)}{=} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}).$$

Par les deux résultats précédents, M est sur le cercle passant par A et B , privé de A et B (sinon on aurait $k = 0$) et tel que sa tangente T en A vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) = k$. ■

17.5 Applications

- $\mathcal{C}(\Omega, r) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z - \omega| = r\}$, où $\Omega(\omega) \in \mathcal{P}$ et $r \geq 0$.
- Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points de \mathcal{P} . Alors

$$\begin{aligned} (AB) &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid z = a \text{ ou } \arg(z-a) = \arg(b-a) \pmod{2\pi}\} \\ &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid z = a \text{ ou } \frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}\} \\ &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid z = a \text{ ou } (z-a)\overline{(b-a)} \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- $\text{méd}([AB]) = \{M(z) \in \mathcal{P} \mid |z-a| = |z-b|\}$.
- Soient \vec{u} et \vec{u}' d'affixes respectives z et z' . Alors
 - ◇ \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow z'/z \in \mathbb{R}^*$;
 - ◇ \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow z'/z \in i\mathbb{R}^*$.
 Il en découle que si $A(a), B(b), C(c)$ sont trois points de \mathcal{P} , alors

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad (AB) \perp (AC) \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*.$$

- Cocyclicité de quatre points

Proposition 11 : $A(a), B(b), C(c), D(d)$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}^*.$$

démonstration : On a

$$\begin{aligned} A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg\left(\frac{b-d}{a-d}\right) \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d}\right) = 0 \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}^*, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■