

# LEÇON N° 18 :

## Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z + b$ , $z \mapsto az$ , $z \mapsto \bar{z}$ , où $a$ et $b$ sont des complexes, $a$ non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.

### Pré-requis :

- Nombres complexes : définition, conjugaison, écriture sous forme exponentielle ;
- Définitions et propriétés des translations, réflexions, rotations, homothétie ;
- Similitude = composée d'une homothétie et d'une réflexion ;

Soit  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien, dont on choisit une base  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  orthonormée (ce qui permet de définir une orientation du plan, utile en section 3), et  $\vec{\mathcal{P}}$  le plan vectoriel associé.

### Un brin d'histoire...

Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, le mathématicien suisse Jean Robert Argand représente des nombres complexes par des points dans un plan. C'est lui qui comprendra en premier la correspondance bi-univoque existante entre les points d'un plan et les nombres complexes. Il expliquera même comment le nombre imaginaire  $i$  peut être interprété comme une rotation d'angle  $\pi/2$ , et introduira le concept de module.

A l'époque des Grecs, ils leur fallait tracer une figure pour voir apparaître des « rapports de longueur », et ainsi passer de la figure aux nombres. La découverte et l'utilisation des nombres complexes a révolutionné la géométrie actuelle en faisant émerger la notion de vecteurs. La représentation géométrique des nombres complexes n'est apparue que bien longtemps après la création des nombres complexes (XVI<sup>e</sup> siècle).

### Introduction

#### Théorème 1 : Les applications

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \vec{\omega} = x\vec{u} + y\vec{v} & \longmapsto & (x, y) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M(x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy \end{array}$$

sont des bijections.

Ce théorème nous permet donc d'associer un nombre complexe à chaque point du plan affine et à chaque vecteur du plan vectoriel associé. On a ainsi la définition suivante :

**Définition 1 :**

- Au point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$  qui est appelé **affixe du point  $M$**  et noté  $z_M$ . On dit aussi que  $M$  est un point d'affixe  $z$ , noté  $M|_z$ .
- A tout vecteur  $\vec{\omega} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$  de  $\mathcal{P}$  est associé le nombre complexe  $\zeta = \alpha + i\beta$  appelé **affixe du vecteur  $\vec{\omega}$**  et noté  $\zeta_{\vec{\omega}}$ .

Se donner une application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  revient donc à se donner une application  $\tilde{f} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $\tilde{f}(M)$  d'affixe  $f(z)$ . On notera indifféremment  $f = \tilde{f}$  pour simplifier les notations.

## 18.1 Nombres complexes et géométrie, point de vue vectoriel

### 18.1.1 Rappels de quelques propriétés utiles

**Théorème 2 :** Soient  $A, B$  deux points de  $\mathcal{P}$ ,  $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$  deux vecteurs et  $k \in \mathbb{R}$ . Alors :

- (i)  $z_A = z_B \Leftrightarrow A = B$  et  $z_{\vec{\omega}_1} = z_{\vec{\omega}_2} \Leftrightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ ;
- (ii)  $z_{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2} = z_{\vec{\omega}_1} + z_{\vec{\omega}_2}$  et  $z_{k\vec{\omega}_1} = k z_{\vec{\omega}_1}$ .
- (iii)  $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$ .

*démonstration :* Cette démonstration utilise surtout le théorème 1. Posons  $z_A = a_1 + ia_2$  et  $z_B = b_1 + ib_2$ ,  $\vec{\omega}_1 = \omega_{11}\vec{u} + \omega_{12}\vec{v}$  et  $\vec{\omega}_2 = \omega_{21}\vec{u} + \omega_{22}\vec{v}$ .

$$(i) \quad z_A = z_B \Leftrightarrow a_1 + ia_2 = b_1 + ib_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \Leftrightarrow A = B. \text{ De même, } z_{\vec{\omega}_1} = z_{\vec{\omega}_2} \Leftrightarrow \omega_{11} + i\omega_{12} = \omega_{21} + i\omega_{22} \Leftrightarrow (\omega_{11}, \omega_{12}) = (\omega_{21}, \omega_{22}) \Leftrightarrow \omega_{11}\vec{u} + \omega_{12}\vec{v} = \omega_{21}\vec{u} + \omega_{22}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2.$$

$$(ii) \quad z_{\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2} = z_{(\omega_{11} + \omega_{21})\vec{u} + (\omega_{12} + \omega_{22})\vec{v}} = \omega_{11} + \omega_{21} + i(\omega_{12} + \omega_{22}) = z_{\vec{\omega}_1} + z_{\vec{\omega}_2}.$$

$$\text{De plus, } z_{k\vec{\omega}_1} = z_{k\omega_{11}\vec{u} + k\omega_{12}\vec{v}} = k\omega_{11} + ik\omega_{12} = k(\omega_{11} + i\omega_{12}) = kz_{\vec{\omega}_1}.$$

$$(iii) \quad z_{\vec{AB}} = z_{\vec{OB} - \vec{OA}} \stackrel{(ii)}{=} z_{\vec{OB}} - z_{\vec{OA}} = z_{b_1\vec{u} + b_2\vec{v}} - z_{a_1\vec{u} + a_2\vec{v}} = b_1 + ib_2 - a_1 - ia_2 = z_B - z_A. \quad \blacksquare$$

**Exercice 1 :** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points d'affixes respectives  $4 + 2i$ ,  $1 - 3i$  et  $-2$ . Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.

**Solution :** Un parallélogramme  $ABCD$  est caractérisé par l'équation vectorielle  $\vec{AD} = \vec{BC}$ . En terme de complexes, si l'on note respectivement  $a, b, c$  et  $d$  les affixes des points  $A, B, C$  et  $D$ , il s'agit de trouver  $d$  tel que  $d - a = c - b \Leftrightarrow d = c - b + a$ , et l'on en déduit  $d = -2 - 1 + 3i + 4 + 2i = 1 + 5i$ .  $\diamond$

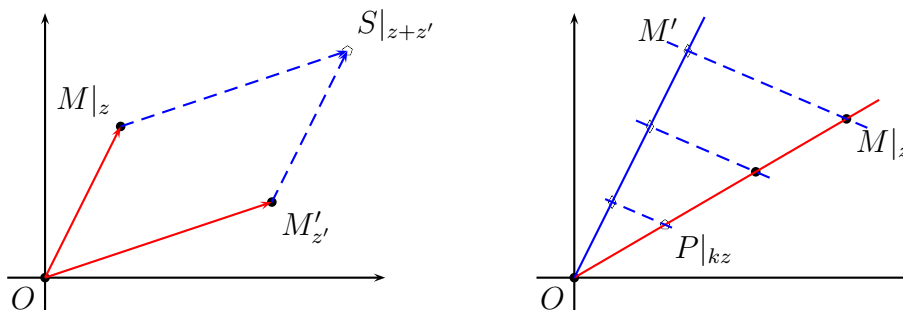
## Constructions géométriques

Soient  $M, M'$  deux points du plan  $\mathcal{P}$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

L'addition de deux complexes étant possibles, on peut définir l'addition de deux points du plan  $\mathcal{P}$  par transport de structure : si  $z_S$  est une affixe vérifiant  $z_S = z + z'$  (donc un point  $S$  de  $\mathcal{P}$  lui est associé), alors on

a aussi  $z_S - 0 = z - 0 + z' - 0$ , soit  $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ , ce qui permet de construire le point  $S$ , que l'on peut ainsi voir comme la somme des points  $M$  et  $M'$ .

De même, si  $k$  est un réel, et  $z_P$  une affixe vérifiant  $z_P = kz$ , alors on a aussi  $z_P - 0 = k(z - 0)$ , soit  $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OM}$ , ce qui permet de construire le point  $P$  associé à l'affixe  $z_P$ , que l'on peut aussi voir comme le produit du point  $M$  par le scalaire  $k$ .



Remarques 1 :

- Ces deux points nous rappellent que  $\mathcal{P}$ , aussi bien que  $\mathbb{C}$ , sont deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
- Si  $k$  est constructible à la règle et au compas, alors le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  l'est aussi en utilisant par exemple le théorème de Thalès. En effet, on trace une droite passant par  $O$  mais ne contenant pas  $M$ . On choisit au compas une longueur arbitraire que l'on reporte autant de fois que nécessaire sur cette droite en partant de  $O$  ( $k = n/p$  : reporter  $p$  fois et marquer le  $n^e$  point si  $n \leq p$  et  $n$  fois sinon en marquant le  $p^e$  point). Le tracé des parallèles assure alors que la droite  $(OM)$  sera coupée au point  $P$  recherché, comme le suggère l'exemple ci-dessus.

### 18.1.2 Nombres complexes et transformations

**Théorème 3 : L'application de  $\mathbb{C}$  dans lui-même qui à  $z$  associe son conjugué  $\bar{z}$  est l'écriture complexe de la réflexion d'axe des abscisses  $(O, \vec{u})$ .**

*démonstration :* Soient  $M, M'$  deux points d'affixes respectives  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ . Alors  $z' = f(z) = \bar{z} \Leftrightarrow x' + iy' = x - iy \Leftrightarrow (x', y') = (x, -y)$ . C'est équivalent à dire que  $M'$  est la symétrique de  $M$  par rapport à l'axe des abscisses  $(O, \vec{u})$ . ■

**Théorème 4 : Soient  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{C}$  et les applications**

$$t : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{et} \qquad h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto z + b \qquad \qquad \qquad z \longmapsto az.$$

**Alors  $t$  est l'écriture complexe de la translation de vecteur  $\vec{\tau}$  d'affixe  $b$ , et  $h$  est l'écriture complexe de l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $a$ .**

*démonstration :*

$t$  : Soient  $M|_z$  et  $M'|_{z'}$  deux points. Alors  $z' = t(z) = z + b \Leftrightarrow z' - z = b \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{\tau} \Leftrightarrow M' = t_{\vec{\tau}}(M)$ , où  $t_{\vec{\tau}}$  désigne la translation de vecteur  $\vec{\tau}$  d'affixe  $b$ .

$h$  : On suppose  $a \in \mathbb{R}^*$ . Alors  $z' = h(z) = az \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = a\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow M' = h_{0,a}(M)$ , où  $h_{0,a}$  désigne l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $a$ . ■

## 18.2 Introduction du module et de l'argument

### 18.2.1 Module

Soit  $M$  un point de  $\mathcal{P}$  d'affixe  $z = x + iy$ . Alors  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ , donc  $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , en utilisant la norme euclidienne définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 2 :** A tout point  $M|_z$  du plan  $\mathcal{P}$ , on associe la quantité  $|z| = OM$  appelée module de  $z$ . Si  $z$  s'écrit  $x + iy$ , alors  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Proposition 1 :** Soient  $A$  et  $B$  deux points d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ . Alors  $AB = |z_B - z_A|$ .

*démonstration :* Posons  $z_A = a_1 + ia_2$  et  $z_B = b_1 + ib_2$ . Alors  $AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = |(b_1 - a_1) + i(b_2 - a_2)| = |b_1 + ib_2 - (a_1 + ia_2)| = |z_B - z_A|$ . ■

**Proposition 2 :** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Alors

- (i)  $|z| \geq 0$  et ( $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ );
- (ii)  $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ ;
- (iii)  $|zz'| = |z||z'|$  (en particulier, pour tout réel  $\lambda$ ,  $|\lambda z| = |\lambda||z|$ );
- (iv)  $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

*démonstration :* Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. Les points (i) et (iv) sont immédiats puisque  $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$  par définition et  $\|\cdot\|$  est une norme.

(ii) Posons  $z = x + iy$ , de sorte que  $|-z| = |-x + i(-y)| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|$  et  $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy| = |z|$ .

(iii) Remarquons tout d'abord que  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{z\bar{z}}$ . Ainsi,  $|zz'| = \sqrt{zz'\bar{z}\bar{z}'} = \sqrt{z\bar{z}}\sqrt{z'\bar{z}'} = |z||z'|$ . En particulier,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , donc la formule s'applique. ■

Remarques 2 :

- Géométriquement, (iv) est une propriété de la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ ,
- (ii), (iii) et (iv) montrent que le module est une norme sur  $\mathbb{C}$ , considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (ce qui était prévisible d'après le théorème 1).

## 18.2.2 Argument

**Définition 3 :** Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z = x + iy$  non nulle. Alors  $z/|z|$  est de module 1, de sorte que son image  $m$  soit sur le cercle trigonométrique. Si  $\theta$  est une mesure modulo  $2\pi$  de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{Om})$ , on a alors

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \text{avec } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\theta$ , qui est aussi une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ , est appelé argument de  $z$  et est noté  $\arg(z)$ . La valeur de  $\theta$  appartenant à l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  est l'argument principal de  $z$ , noté  $\text{Arg}(z)$ .

Remarque 3 : Le nombre complexe nul n'admet pas d'argument. De plus, tout nombre complexe non nul  $z$  d'argument  $\theta$  s'écrit sous la forme  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$ , et réciproquement, si  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $\rho > 0$ , alors  $z$  est de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ .

**Proposition 3 :** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}^*$ . On a :

- (i)  $\arg(-z) = \pi + \arg(z) [2\pi]$  ;
- (ii)  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$  ;
- (iii)  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$ .

*démonstration :* On pose  $\theta = \arg(z)$  (resp.  $\theta' = \arg(z')$ ) pour un nombre complexe  $z$  (resp.  $z'$ ) non nul. Toutes les égalités écrites dans cette démonstration s'entendent modulo  $2\pi$ .

$$(i) \quad \arg(-z) = \arg(|-z|(-\cos \theta - i \sin \theta)) = \arg(|z|(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))) = \pi + \theta = \pi + \arg(z).$$

$$(ii) \quad \arg(\bar{z}) = \arg(|\bar{z}|(\cos \theta - i \sin \theta)) = \arg(|z|(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))) = -\theta = -\arg(z).$$

(iii) Ici, nous aurons besoin des formules de trigonométrie. En effet,

$$\begin{aligned} \arg(zz') &= \arg(|z|(\cos \theta + i \sin \theta) |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')) \\ &= \arg(|zz'|(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta'))) \\ &= \arg(|zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))) \\ &= \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z'). \end{aligned}$$

■

Remarque 4 : Le point (iii) nous amène à écrire que l'application

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}, \times) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ z &\longmapsto \arg(z) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

C'est là qu'on voit apparaître l'intérêt de la multiplication sur  $\mathbb{C}$ . En effet, si l'on prend deux points  $M, M'$  du plan  $\mathcal{P}$  d'arguments respectifs  $\theta$  et  $\theta'$  et de module 1, où se situera le point d'argument  $\theta + \theta'$  et de module 1 ?

Soit  $Z$  l'affixe de ce point. Alors  $\arg(Z) = \theta + \theta' = \arg(z_M) + \arg(z_{M'}) = \arg(z_M z_{M'})$ . Mais on a aussi  $|Z| = |z_M| |z_{M'}| = |z_M z_{M'}|$ , donc  $Z = z_M z_{M'}$ , ce qui nous donne la position de ce point dans le plan  $\mathcal{P}$ .

**Proposition 4 :** Soient  $M_1|_{m_1}$ ,  $M_2|_{m_2}$ ,  $M_3|_{m_3}$ ,  $M_4|_{m_4}$  des points de  $\mathcal{P}$ . Alors

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) = \arg\left(\frac{m_4 - m_3}{m_2 - m_1}\right).$$

*démonstration :*

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) &= \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_3M_4}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_2M_1}\right) \stackrel{\text{déf.}}{=} \arg(z_{\overrightarrow{M_3M_4}}) - \arg(z_{\overrightarrow{M_2M_1}}) \\ &\stackrel{\text{thm 2(ii)}}{=} \arg(m_4 - m_3) - \arg(m_2 - m_1) \\ &\stackrel{\text{prop 3(ii)}}{=} \arg(m_4 - m_3) + \arg\left(\frac{1}{m_2 - m_1}\right) \\ &\stackrel{\text{prop 3(iii)}}{=} \arg\left(\frac{m_4 - m_3}{m_2 - m_1}\right). \end{aligned}$$

■

## 18.3 Nombres complexes et géométrie, point de vue affine

On a déjà pu introduire plus tôt l'addition de deux points de  $\mathcal{P}$  ainsi que la multiplication d'un point de  $\mathcal{P}$  par un scalaire réel. On vient aussi de voir l'intérêt que suscite la multiplication de deux complexes, dans le sens où l'identification à  $\mathcal{P}$  nous permet de transporter cette multiplication pour la définir entre deux points de  $\mathcal{P}$ , intuitivement plus difficile à faire.

Soient  $M, M'$  deux points de  $\mathcal{P}$  d'affixes respectives  $m = m_1 + im_2$  et  $m' = m'_1 + im'_2$ . Soit encore  $z_Q$  une affixe vérifiant  $z_Q = zz'$ . Alors on a  $z_Q = (m_1 + im_2)(m'_1 + im'_2) = (m_1m'_1 - m_2m'_2) + i(m_1m'_2 + m_2m'_1)$ , donc  $Q$  est le point de coordonnées  $(m_1m'_1 - m_2m'_2, m_1m'_2 + m_2m'_1)$ . Cela nous permet d'interpréter géométriquement le produit de deux nombres complexes, grâce au théorème suivant :

**Théorème 6 :** Soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . L'application  $z \mapsto az$  est l'écriture complexe de la similitude directe de centre  $O$ , de rapport  $|a|$  et d'angle  $\text{Arg}(a)$  (rotation si  $|a| = 1$ ).

*démonstration :* Soient  $M|_z$  et  $M'|_{z'}$  deux points de  $\mathcal{P}$ . On a les équivalences suivantes :

$$z' = f(z) = az \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{OM'}{OM} = \frac{|z'|}{|z|} = \left|\frac{z'}{z}\right| = |a| \\ \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}\right) = \text{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right) = \text{Arg}(a) \end{cases} \Leftrightarrow M' = s_{O,|a|,\text{Arg}(a)}(M),$$

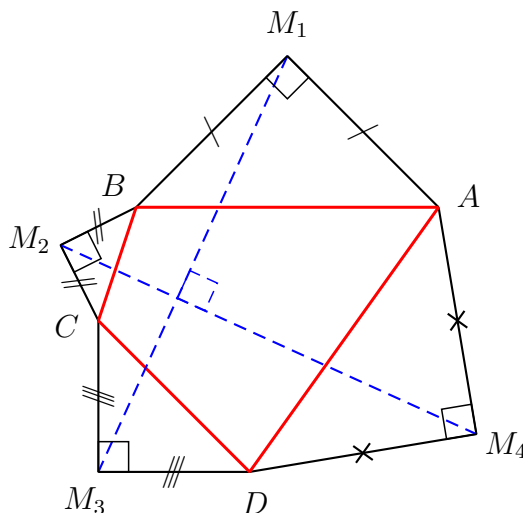
où  $s_{O,|a|,\text{Arg}(a)}$  désigne la similitude de centre  $O$ , de rapport  $|a|$  et d'angle  $\text{Arg}(a)$  (c'est-à-dire la composée de l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $|a|$  et de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\text{Arg}(a)$ ).

Si  $|a| = 1$ , l'homothétie considérée est l'identité sur le plan  $\mathcal{P}$ , donc la similitude déterminée se réduit à la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\text{Arg}(a)$ . ■

**Exercice :** Soit  $ABCD$  un quadrilatère quelconque. On construit les points  $M_1, M_2, M_3$  et  $M_4$  de sorte que les triangles respectifs  $ABM_1, BCM_2, CDM_3$  et  $DAM_4$  soient rectangles isocèles en ces points. Montrer

que les droites  $(M_1M_3)$  et  $(M_2M_4)$  sont perpendiculaires et que  $M_1M_3 = M_2M_4$ .

**Solution** : Faisons une figure pour mieux voir les choses :



Notons par des lettres minuscules (et éventuellement indicées) les affixes correspondantes à chaque point. L'application  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto iz$  est une rotation puisque  $|i| = 1$ . Notons alors  $r$  la rotation vectorielle d'angle  $\pi/2$  ( $\text{Arg}(i) = \pi/2$ ). On a alors

$$\begin{aligned} r(\overrightarrow{M_1B}) = \overrightarrow{M_1A} &\Leftrightarrow r(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_1}) = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_1} \\ &\Leftrightarrow r(b - m_1) = a - m_1 \Leftrightarrow a - m_1 = i(b - m_1) \Leftrightarrow m_1(1 - i) = a - ib \\ &\Leftrightarrow m_1 = \frac{(a - ib)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{a + b + i(a - b)}{2}. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$m_2 = \frac{b + c + i(b - c)}{2}, \quad m_3 = \frac{c + d + i(c - d)}{2} \quad \text{et} \quad m_4 = \frac{d + a + i(d - a)}{2}.$$

On en déduit alors que  $2(m_4 - m_2) = a - b - c + d + i(-a - b + c + d)$ . Or

$$\begin{aligned} 2(m_3 - m_1) &= -a - b + c + d + i(-a + b + c - d) \\ \Leftrightarrow 2i(m_3 - m_1) &= a - b - c + d + i(-a - b + c + d) = 2(m_4 - m_2) \\ \Leftrightarrow r(m_3 - m_1) &= m_4 - m_2 \Leftrightarrow r(\overrightarrow{M_1M_3}) = \overrightarrow{M_2M_4}, \end{aligned}$$

ce qui prouve non seulement que  $M_1M_3 = M_2M_4$ , mais aussi que les droites  $(M_1M_3)$  et  $(M_2M_4)$  sont perpendiculaires.  $\diamond$

**Corollaire 1** : Soient  $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  et  $b \in \mathbb{C}$ . L'application  $z \mapsto az + b$  est l'écriture complexe de la similitude de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$ , de rapport  $|a|$  et d'angle  $\text{Arg}(a)$ .

**démonstration** : Soient  $M, M'$  deux points de  $\mathcal{P}$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

Montrons d'abord le sens direct. On suppose que  $M' = f(M)$ , donc  $z' = f(z) = az + b$ . Le point d'affixe  $\omega = \frac{b}{1-a}$  est invariant par  $f$  et est donc point fixe de  $f$ . Par suite,  $z' = az + b \Leftrightarrow z' = az + b + \omega - a\omega - b \Leftrightarrow z' - \omega = az - a\omega = a(z - \omega)$ . Posons alors pour toute affixe  $\zeta$ ,  $Z = \zeta - \omega$ , qui correspond à un changement de repère par translation de vecteur d'affixe  $\omega$  (d'après le théorème 4). La nouvelle origine est donc  $\Omega$  d'affixe  $\omega$  et  $f$  s'écrit dans le nouveau repère  $f(Z) = aZ$ . Le théorème précédent permet de conclure.

Réciproquement, on se donne une similitude  $s$  de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$ , de rapport  $k > 0$  et d'angle  $\theta$ , et l'on veut montrer que si  $M' = s(M)$ ,  $z' = f(z)$ . Posons pour toute affixe  $\zeta$ ,  $Z = \zeta - \omega$ , et donnons-nous  $M' = s(M)$ . On a alors

$$\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k = \frac{|z' - \omega|}{|z - \omega|} = \frac{|Z'|}{|Z|} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta = \arg \left( \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \arg \left( \frac{Z'}{Z} \right).$$

En remarquant que  $k = |ke^{i\theta}|$  et  $\theta = \text{Arg}(ke^{i\theta})$ , on déduit que

$$\frac{Z'}{Z} = ke^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow z' = ke^{i\theta}z + \omega(1 - ke^{i\theta}),$$

qui est bien de la forme  $z' = az + b = f(z)$ . ■