

LEÇON N° 19 :

Étude de la fonction $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f . Applications.

Pré-requis :

- Transformations du plan : expression complexe, propriétés ;
- Nombres complexes : propriétés, module, argument ;
- Théorème de l'arc capable.

On se place dans le plan complexe \mathcal{P} muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

19.1 Étude de la fonction f

19.1.1 Domaine de définition, bijectivité

Théorème 1 : f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sa réciproque est :

$$f^{-1} : z \mapsto \frac{bz - a}{z - 1}.$$

démonstration : f est clairement définie sur $\mathbb{C} \setminus \{b\}$. Si $a = b$, on a $f(z) = 1$ pour tout complexe z . On suppose donc dans la suite que $a \neq b$. Soit alors $z \in \mathbb{C} \setminus \{b\}$.

$$\begin{aligned} f(z) = z' &\Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b} = z' \Leftrightarrow z-a = z'z - z'b \\ &\Leftrightarrow z(1-z') = -z'b + a \Leftrightarrow z = \frac{z'b - a}{z' - 1} \quad (z' \neq 1). \end{aligned}$$

■

19.1.2 Construction de $M' = f(M)$

Proposition 1 : Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'}.$$

démonstration : On note a, b, c, a', b', c' les affixes respectives de A, B, C, A', B', C' dans le plan complexe. On a alors :

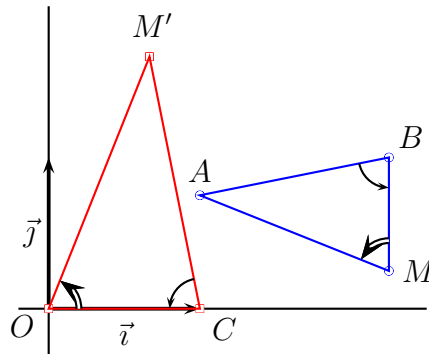
$$\begin{aligned}
 & \text{Deux triangles } ABC \text{ et } A'B'C' \text{ sont semblables} \\
 \Leftrightarrow & \frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'} \text{ et } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \left| \frac{c'-a'}{b'-a'} \right| \text{ et } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{c'-a'}{b'-a'}\right) \pmod{2\pi} \\
 \Leftrightarrow & \frac{c-a}{b-a} = \frac{c'-a'}{b'-a'},
 \end{aligned}$$

car ces deux nombres complexes ont même module et même argument. ■

Si M, M', A, B, C sont cinq points d'affixes respectives $z, z', a, b, 1$, alors :

$$z' = f(z) \Leftrightarrow \frac{z' - 0}{1 - 0} = \frac{z - a}{z - b} \Leftrightarrow \frac{z - a}{z - b} = \frac{0 - z'}{0 - 1}.$$

D'après la proposition précédente, on sait alors que les triangles MBA et OCM' sont semblables, ce qui permet donc la construction du point M' :



19.1.3 Décomposition de f

Remarquons que

$$f(z) = \frac{z-a}{z-b} = 1 + \frac{b-a}{z-b} = 1 + (b-a) \overline{\left(\frac{1}{z-b}\right)}.$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2 : f se décompose en $f = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$, où :

- * $f_1 : z \mapsto z - b$ est la translation de vecteur \overrightarrow{OB} d'affixe $-b$;
- * $f_2 : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$ est l'inversion de pôle O et de rapport 1 (voir définition ci-dessous) ;
- * $f_3 : z \mapsto \overline{z}$ est la réflexion par rapport à l'axe des réels ;
- * $f_4 : z \mapsto (b-a)z$ est la similitude de rapport $|b-a|$ et d'angle $\arg(b-a)$;
- * $f_5 : z \mapsto 1 + z$ est la translation de vecteur \overrightarrow{OC} d'affixe 1.

Définition 1 : On appelle *inversion de pôle Ω et de puissance k* , l'application

$$\begin{cases} \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} & \longrightarrow & \mathcal{P} \setminus \{\Omega\} \\ M & \longmapsto & M' \end{cases}$$

telle que Ω, M, M' soient alignés et $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = k$.

En langage complexe, voyons ce que cela donne :

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{\Omega M'} &= \lambda \overrightarrow{\Omega M} & (1) \\ \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = k &\Rightarrow \lambda = \frac{k}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2} \end{aligned}$$

La relation (1) donne donc

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k \frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\|\overrightarrow{\Omega M}\|^2} \Leftrightarrow z' - \omega = k \frac{z - \omega}{(z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})} = \frac{k}{z - \omega} \Leftrightarrow z' = \omega + \frac{k}{z - \omega}.$$

Proposition 2 :

(a) Pour toute droite \mathcal{D} de \mathcal{P} , il existe un couple $(\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$ tel que

$$M(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow z\bar{\omega} + \bar{z}\omega + \rho = 0 ;$$

(b) Réciproquement, pour tout couple $(\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{M(z) \in \mathcal{P} \mid z\bar{\omega} + \bar{z}\omega + \rho = 0\}$$

est une droite de vecteur normal $\vec{n}(\omega)$;

(c) Pour tout cercle $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$ de centre Ω et de rayon $r > 0$, il existe $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que

$$M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{\omega} - \bar{z}\omega + k = 0 ;$$

(d) Réciproquement, pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, on a

$$\{M(z) \in \mathcal{P} \mid z\bar{z} - z\bar{\omega} - \bar{z}\omega + k = 0\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } |\omega|^2 < k, \\ \{\Omega(\omega)\} & \text{si } |\omega|^2 = k, \\ \mathcal{C}(\Omega, \sqrt{|\omega|^2 - k}) & \text{si } |\omega|^2 > k, \end{cases}$$

où $\mathcal{C}(\Omega, \sqrt{|\omega|^2 - k})$ désigne le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon $\sqrt{|\omega|^2 - k}$.

démonstration :

(a) Considérons une droite \mathcal{D} du plan, d'équation $ax + by + c = 0$, où a, b, c sont trois réels tels que a et b soient non nuls. Posons $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$. Alors

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \Re(\bar{\omega}z) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\bar{\omega}z + \omega\bar{z}) + c = 0 \Leftrightarrow \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + 2c = 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $\rho = 2c \in \mathbb{R}$ pour arriver au résultat.

(b) Réciproquement, et avec les mêmes notations que précédemment,

$$\begin{aligned} \{M(z) \in \mathcal{P} \mid \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \rho = 0\} &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid 2\Re(\bar{\omega}z) + \rho = 0\} \\ &= \{M(z) \in \mathcal{P} \mid 2(ax + by) + \rho = 0\} \\ &= \left\{M(z) \in \mathcal{P} \mid ax + by + \frac{\rho}{2} = 0\right\}, \end{aligned}$$

ce qui correspond bien à l'équation d'une droite dont le vecteur normal admet pour coordonnées (a, b) , donc d'affixe ω .

(c) Soit \mathcal{C} le cercle de centre $\Omega(\omega)$ (on pose $\omega = a + ib$) et de rayon $r > 0$. Alors

$$\begin{aligned} M(z) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow |z - \omega|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z - \omega)(\overline{z - \omega}) = r^2 \Leftrightarrow (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \omega\bar{\omega} = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + \underbrace{a^2 + b^2 - r^2}_{\in \mathbb{R}} = 0. \end{aligned}$$

En posant $k = a^2 + b^2 - r^2$, on arrive bien au résultat attendu.

(d) Réciproquement, en posant $z = x + iy$ et $\omega = a + ib$, on a

$$\begin{aligned} z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + k = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(ax + by) + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - a^2 - b^2 + k = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = |\omega|^2 - k. \end{aligned}$$

Il y a alors trois cas à distinguer :

- si $|\omega|^2 < k$, alors il n'y a pas de solution, et l'ensemble cherché est vide.
- si $|\omega|^2 = k$, alors $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0$, donc $(a, b) = (0, 0)$ et l'ensemble cherché est le point Ω .
- si $|\omega|^2 > k$, alors en posant $r^2 = |\omega|^2 - k$, on trouve l'équation d'un cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r .

■

Proposition 3 : Soit φ_2 une inversion de pôle O et de puissance 1 (φ_2 est l'application de \mathcal{P} associée à f_2). L'application φ_2 transforme :

- (i) une droite passant par O privée de O en la même droite ;
- (ii) une droite ne passant pas par O en un cercle passant par O privé de O ;
- (iii) un cercle de centre O de rayon $r > 0$ en un cercle de rayon $1/r$ de centre O ;
- (iv) un cercle passant par O privé de O en une droite ne passant pas par O ;
- (v) un cercle ne passant pas par O en un cercle ne passant pas par O .

démonstration : Dans toute cette démonstration, on notera \cdot^* l'ensemble \cdot privé de l'origine O .

- (i) Une droite \mathcal{D} passant par O signifie qu'elle est d'équation complexe $z\bar{\omega} + \bar{z}\omega = 0$. Le fait qu'elle soit privée de O signifie simplement que $z \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mathcal{D}^*) : \frac{1}{\bar{z}}\bar{\omega} + \frac{1}{z}\omega = 0 &\Leftrightarrow \frac{z\bar{\omega}}{\bar{z}z} + \frac{\omega\bar{z}}{\bar{z}z} = 0 \\ &\Leftrightarrow z\bar{\omega} + \bar{z}\omega = 0.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi_2(\mathcal{D}^*)$ et \mathcal{D}^* ont la même équation, ces deux objets sont les mêmes.

- (ii) On procède selon le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned}\mathcal{D} : \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \rho = 0 \quad (\omega, \rho) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^* \\ \Rightarrow \forall z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathcal{D}) : \frac{1}{\bar{z}}\bar{\omega} + \frac{1}{z}\omega + \rho = 0 \\ \Rightarrow \forall z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathcal{D}) : \bar{\omega}z + \omega\bar{z} + \rho z\bar{z} = 0 \\ \Rightarrow \forall z \neq 0, \quad \varphi_2(\mathcal{D}) : z\bar{z} - \left(-\frac{\omega}{\rho}\right)\bar{z} - \left(-\frac{\bar{\omega}}{\rho}\right)z = 0.\end{aligned}$$

C'est l'équation d'un cercle passant par O , privé de O (car $z \neq 0$).

- (iii) Le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $r > 0$ admet pour équation complexe $z\bar{z} + r^2 = 0$. Alors, pour tout $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathcal{C}) : \frac{1}{z\bar{z}} + r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + r^2 z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} + \left(\frac{1}{r}\right)^2 = 0.$$

$\varphi_2(\mathcal{C})$ est donc un cercle de centre O et de rayon $1/r$.

- (iv) Le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $r > 0$ admet pour équation complexe $z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z = 0$. Alors, pour tout $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathcal{C}^*) : \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{\bar{\omega}}{\bar{z}} - \frac{\omega}{z} = 0 \Leftrightarrow 1 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{\omega} + \bar{z}\omega - 1 = 0.$$

$\varphi_2(\mathcal{C}^*)$ est une droite ne passant pas par O .

- (v) Le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon $r > 0$ admet pour équation complexe $z\bar{z} - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + k = 0$, où $(\omega, k) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $|\omega|^2 \geq k$. Alors, pour tout $z \neq 0$,

$$\varphi_2(\mathcal{C}^*) : \frac{1}{z\bar{z}} - \frac{\bar{\omega}}{\bar{z}} - \frac{\omega}{z} + k = 0 \Leftrightarrow 1 - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} + kz\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - \left(\frac{\bar{\omega}}{k}\right)z - \frac{\omega}{k}\bar{z} + 1 = 0.$$

$\varphi_2(\mathcal{C}^*)$ est donc un cercle ne passant pas par O . ■

Puisque les translations, réflexions et similitudes conservent les droites et les cercles, l'application φ (application de \mathcal{P} associée à f) transforme les droite et cercle en droite ou cercle, à l'image de la proposition précédente. On obtient donc le théorème suivant, que l'on ne démontrera pas :

Théorème 3 : Soit \mathcal{D} une droite et \mathcal{C} un cercle de centre I et de rayon $r > 0$. Alors

- (i) Si $B \in \mathcal{D}$, alors $\varphi(\mathcal{D} \setminus \{B\})$ est une droite passant par C , privée de C ;
- (ii) Si $B \notin \mathcal{D}$, alors $\varphi(\mathcal{D})$ est un cercle passant par C , privé de C ;
- (iii) Si $I = B$, alors $\varphi(\mathcal{C})$ est le cercle de centre C de rayon $\frac{1}{r}|b-a|$;
- (iv) Si $B \in \mathcal{C}$, alors $\varphi(\mathcal{C} \setminus \{B\})$ est une droite ne passant pas par C ;
- (v) Si $B \notin \mathcal{C}$, alors $\varphi(\mathcal{C})$ est un cercle ne passant pas par C .

19.2 Lignes de niveaux

19.2.1 Pour le module

On note $\Gamma_k = \{M \in \mathcal{P} \setminus \{B\} \mid |f(z)| = k\} = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{B\} \mid \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \right\}$.

Proposition 4 : Soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- (a) si $k < 0$, alors $\Gamma_k = \emptyset$;
- (b) si $k = 0$, alors $\Gamma_k = \{A\}$;
- (c) si $k = 1$, alors Γ_k est la médiatrice du segment $[AB]$;
- (d) sinon, Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$, où

$$I = \text{bar}\{(A, 1), (B, k)\} \quad \text{et} \quad J = \text{bar}\{(A, 1), (B, -k)\}.$$

démonstration :

(a) Trivial, car un module est toujours positif.

(b) $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 0 \Rightarrow |z-a| = 0 \Leftrightarrow \Gamma_k = \{A\}$.

(c) $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = 1 \Rightarrow |z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB$, d'où le résultat.

(d) $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = k \Rightarrow MA^2 = k^2 MB^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$,
donc $[MI] \perp [MJ]$ et Γ_k est le cercle de diamètre $[IJ]$.

■

Remarque 1 : Pour la construction de I, J et de Γ_k associé, on donne ce qui suit :

Soit $C \in \mathcal{P} \setminus (AB)$ tel que $\frac{CA}{CB} = k$, alors I (resp. J) est le pied de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) à \widehat{ACB} .

19.2.2 Pour l'argument

Proposition 5 : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$\Gamma_\theta = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = \theta \pmod{\pi} \right\}$$

et

$$\Gamma'_\theta = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} \setminus \{A, B\} \mid \arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = \theta \pmod{2\pi} \right\}.$$

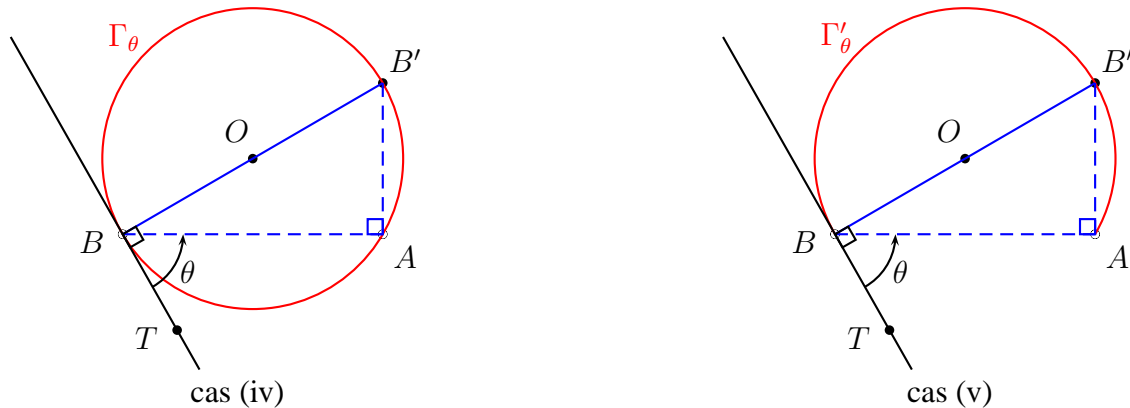
On distingue alors plusieurs cas :

- (i) Si $\theta = 0 \pmod{\pi}$, alors $\Gamma_\theta = (AB) \setminus \{A, B\}$;
- (ii) Si $\theta = 0 \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma'_\theta = (AB) \setminus [AB]$;
- (iii) Si $\theta = \pi \pmod{2\pi}$, alors $\Gamma'_\theta =]AB[$;

Si $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, alors on définit un point $T \in \mathcal{P} \setminus \{B\}$ tel que $(\overrightarrow{BT}, \overrightarrow{BA}) = \theta \pmod{2\pi}$.
Alors

- (iv) $\Gamma_\theta = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, où \mathcal{C} est le cercle passant par A et B , tangent à (BT) en B ;
- (v) Γ'_θ est l'arc ouvert \widehat{AB} délimité par le demi-plan de frontière (AB) et ne contenant pas T .

Voici les figures illustrant les cas (iv) et (v) :



démonstration : Notons que $\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \arg(z-a) - \arg(z-b) = (\vec{i}, \overrightarrow{AM}) - (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) \pmod{2\pi}$.

- (i) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \pmod{\pi}$, donc $M \in (AB) \setminus \{A, B\}$.
- (ii) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0 \pmod{2\pi}$, donc $M \in (AB) \setminus [AB]$.
- (iii) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \pi \pmod{2\pi}$, donc $M \in]AB[$.
- (iv) Soit B' le point diamétralement opposé à B sur \mathcal{C} . Alors $B'BT$ est un triangle rectangle en B , ainsi que $B'AB$ en A . Alors

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'A}) = \pi - \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta \pmod{\pi}.$$

Donc d'après le théorème de l'arc capable, $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$.

- (v) Même démonstration que précédemment, en remarquant que les mesures principales sont de même signe dans le même demi-plan. ■

19.3 Applications

19.3.1 Colinéarité et orthogonalité

Théorème 4 : Soient A, B et $M \neq B$ trois points de \mathcal{P} . Les droites (AM) et (BM) sont parallèles (resp. perpendiculaires) si et seulement si

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \quad (\text{resp.} \in i\mathbb{R}).$$

démonstration : On suppose les trois points distincts, sinon le résultat est évident. On a alors

$$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{A, B\},$$

d'où A, B et M sont alignés, ou les droites (AM) et (BM) sont parallèles. De plus,

$$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

et les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{MB} sont bien orthogonaux. ■

19.3.2 Critère de cocyclicité

Théorème 5 : Quatre points distincts A, B, C, D d'afixes respectives a, b, c, d sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R}.$$

démonstration : Notons tout d'abord que $\frac{a-c}{a-d} \div \frac{b-c}{b-d}$ est appelé bi-rapport du quadruplet (A, B, C, D) , et est noté $[A, B, C, D]$. On a donc

$$[A, B, C, D] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) = \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi}$$

$\Leftrightarrow A, B, C, D$ cocycliques (d'après le théorème de l'arc capable) ou alignés. ■