LEÇON N° 20 :

Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.

Pré-requis :
- *Représentation d'un nombre complexe dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *muni d'un repère orthonormé direct ;*
- *Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe, en particulier :*

$$r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \ ; \end{cases}$$

- *Groupe cyclique, similitude directe et son écriture complexe.*

Dans toute la leçon, et sauf mention contraire, n désigne un entier naturel non nul, et Z un nombre complexe non nul s'écrivant sous forme exponentielle $Z = R\,e^{i\theta}$. Un nombre complexe z quelconque sera toujours écrit $z = r\,e^{i\alpha}$ sous forme exponentielle.

20.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

20.1.1 Cas général

Problème : Il s'agit de trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = Z$, c'est-à-dire résoudre l'équation complexe $z^n = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On trouve alors :

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n\,e^{in\alpha} = R\,e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R \\ n\alpha \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = R^{\frac{1}{n}} \\ \alpha \equiv \dfrac{\theta}{n} \ \left[\dfrac{2\pi}{n}\right] \end{cases},$$

d'où les solutions suivantes :

$$\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad z_k := R^{\frac{1}{n}}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Théorème 1 : L'équation complexe $z^n = Z$ admet n racines distinctes. Son ensemble solution est donné par

$$S_n = \left\{ R^{\frac{1}{n}}\,e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}.$$

démonstration : *L'existence des racines est donnée par ce qui précède le théorème. L'unicité de chaque solution vient de l'égalité modulo $2\pi/n$: en effet, avec les notations données, on a que pour tous $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $z_{k+n} = z_k$.* ■

Définition 1 : Les nombres z_k définis ci-dessus sont appelés *racines n-ièmes de Z*. On note leur ensemble S_n.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \sqrt{3} + i$.

<u>**Solution**</u> : Il suffit de remarquer que

$$|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \text{et} \qquad \arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6},$$

d'où les trois solutions suivantes :

$$\forall\, k \in \{1, 2, 3\}, \qquad z_k = 2^{\frac{1}{3}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)}.$$

$\diamondsuit$

20.1.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 2 : On désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité par

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

`Remarque 1` : On a donc que tout complexe $z \in \mathbb{U}_n$ vérifie $z^n = 1$.

Théorème 2 : Les racines n-ièmes d'un nombre complexe Z sont exactement les produits de l'une d'entre elles avec les racines n-ièmes de l'unité. Autrement dit, si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z^n = Z$, alors

$$S_n = \left\{ z\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

démonstration : *Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z^n = Z$. Alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a*

$$\left(z\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)^n = z^n \underbrace{e^{i2k\pi}}_{=1} = Z.$$

$\blacksquare$

Théorème 3 : $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est le seul sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ d'ordre n. De plus, il est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

démonstration :

Sous-groupe :

- *Si $k = 0$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$, donc $1 \in \mathbb{U}_n$.*
- *Soient $z, z' \in \mathbb{U}_n$. Alors*

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{n}} \\ &= e^{i\frac{2k''\pi}{n}} \in \mathbb{U}_n, \qquad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} k'' \in \{0, \ldots, n-1\} \\ k + k' \equiv k''\ [n]. \end{array} \right. \end{aligned}$$

– *Soit $z \in \mathbb{U}_n$. On remarque que si $z' = e^{i\frac{-2k\pi}{n}}$, alors $z \cdot z' = 1$, de sorte que $z^{-1} = z' \in \mathbb{U}_n$.*

Unicité : *Soit G un tel sous-groupe, c'est-à-dire un sous groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$ d'ordre n. Si $z \in G$, alors $z^n = 1$ (car G est justement d'ordre n), donc $z \in \mathbb{U}_n$, ou encore $G \subset \mathbb{U}_n$. Puisque G et $\mathbb{U}_n$ ont le même cardinal, il vient que $G = \mathbb{U}_n$.*

Isomorphie : *On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{U}_n, \cdot) \\ \overline{k} & \longmapsto & e^{i\frac{2k\pi}{n}}. \end{array}$$

On détermine que

$$f(\overline{0}) = e^{i\frac{2\cdot 0\pi}{n}} = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\overline{k} + \overline{k'}) = e^{i\frac{2(k+k')\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2k'\pi}{n}} = f(\overline{k}) \cdot f(\overline{k'}),$$

de sorte que f soit un morphisme de groupes. On montre de plus qu'il est injectif :

$$f(\overline{k}) = f(\overline{k'}) \Leftrightarrow e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n}\ [2\pi] \Leftrightarrow k \equiv k'\ [n] \Leftrightarrow \overline{k} = \overline{k'}.$$

Enfin, grâce au point précédent, on sait que $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{U}_n|$, donc f est un isomorphisme. ■

Corollaire 1 : $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ est un groupe cyclique.

démonstration : *Découle directement du fait que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ l'est.* ■

Proposition 1 : Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont les $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, où $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et n sont premiers entre eux.

démonstration : $\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{2\cdot 2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}}\right\} = \{1, \omega_1, \omega_1^2, \ldots, \omega_1^{n-1}\}$, *donc ω_1 est un générateur de $\mathbb{U}_n$. Soit alors $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. On a*

$$\begin{array}{rcl} \omega_k \text{ est un générateur de } \mathbb{U}_n & \Leftrightarrow & \exists\, k' \mid (\omega_k)^{k'} = \omega_1 \Leftrightarrow e^{i\frac{2kk'\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ & \Leftrightarrow & kk' \equiv 1\ [n] \Leftrightarrow \exists\, k', u \mid kk' + un = 1 \\ & \overset{\text{Bézout}}{\Leftrightarrow} & k \wedge n = 1, \end{array}$$

d'où le résultat. ■

Exemple avec $\mathbb{U}_6$:

– $5 \wedge 6 = 1$ et $\langle e^{i\frac{5\pi}{3}} \rangle = \{1, e^{i\frac{5\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{3\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\} = \mathbb{U}_6$;

– $2 \wedge 6 = 2$ et $\langle e^{i\frac{2\pi}{3}} \rangle = \{1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\} \neq \mathbb{U}_6$;

Définition 3 : Un générateur de $\mathbb{U}_n$ est appelé *racine primitive n-ième de l'unité*.

20.2 Interprétation graphique

On se place dans un plan $\mathscr{P}$.

Définition 4 : Soient $M_0, \ldots, M_{n-1} \in \mathscr{P}$. Ces points constituent les n sommets d'un polygone régulier s'il existe un point Ω et une rotation de centre Ω et d'angle $2\pi/n$ envoyant M_k sur M_{k+1} (pour $k \in \{0, \ldots, n-2\}$) et M_{n-1} sur M_0.

Proposition 2 : Soit $M \in \mathscr{P}$ le point d'affixe Z. Les racines n-ièmes de Z se situent sur un même cercle de centre O (origine du repère) et de rayon $R^{\frac{1}{N}}$. De plus, si $n = 2$, elles sont diamétralement opposées ; $n \geqslant 3$, elles forment les sommets d'un polygone régulier.

démonstration : *Notons M_k le point d'affixe $z_k = R^{\frac{1}{n}}\, e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Soit un tel k. Alors on vérifie que $OM_k = |z_k| = R^{\frac{1}{n}}$, de sorte que les racines n-ièmes de Z soient effectivement situées sur un même cerlce de centre O et de rayon $R^{\frac{1}{n}}$.*

De plus, lorsque $n = 2$, le calcul nous permet d'affirmer que $\arg(z_0) = \theta/n$ et $\arg(z_1) = \theta/n + \pi$, donc les racines sont diamétralement opposées.

Enfin, lorsque $n \geqslant 3$, on vérifie que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, on ait

$$z_k\, e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_{k+1} \qquad \text{et} \qquad z_{n-1}\, e^{i\frac{2\pi}{n}} = z_0,$$

d'où le résultat attendu. ■

Proposition 3 : Les racines n-ièmes de Z se déduisent de celles de l'unité par une similitude de centre O, de rapport $R^{\frac{1}{n}}$ et d'angle θ/n.

démonstration : *On rappelle que $f : z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ est l'écriture complexe de la similitude de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$. Soit alors $a = R^{\frac{1}{n}}\, e^{i\frac{\theta}{n}} \in \mathbb{C}^*$, qui est une racine n-ième de Z ($k = 0$). D'après le théorème 2, les autres racines de Z se déduisent de celle-ci par multiplication avec les racines n-ièmes de l'unité, notées précédemment ω_k. On a donc*

$$S_n = \{a \cdot 1, a \cdot \omega_1, \ldots, a \cdot \omega_{n-1}\} = \{f(\omega_0), f(\omega_1), \ldots, f(\omega_{n-1})\},$$

et chaque racine n-ième de Z est donc bien l'image d'une racine n-ième de l'unité par la similitude annoncée. ■

20.3 Applications

20.3.1 Factorisation

Exercice : Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme défini par $P(z) = z^4 + 1$.

<u>**Solution**</u> : $z^4 = -1 = e^{i(-\pi)}$, donc pour $k = 0, \ldots, 3$, on a $z_k = e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}$, ce qui donne

$$P(z) = (z - e^{-i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{\pi}{4}})(z - e^{i\frac{3\pi}{4}})(z - e^{i\frac{5\pi}{4}}).$$

◇

20.3.2 Somme et produit des racines n-ièmes de l'unité

$$\begin{aligned} z^n = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-\omega_0)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^n - (1+\omega_1+\cdots+\omega_{n-1})\, z^{n-1} + \cdots + (-1)^n\, \omega_1\cdots\omega_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0 \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\omega_k = 1.$$

20.3.3 Caractérisation d'un triangle équilatéral

Exercice : Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $b + ja + j^2c = 0$ (ou $c + ja + j^2b = 0$).

__Solution__ : On considère la rotation $\mathscr{R}$ de centre A et d'angle $\pi/3$. Alors deux cas se présentent :

Si $\mathscr{R}\,(C) = B$, alors

$$\begin{aligned} & (b-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}\,(c-a) \qquad (j = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow -j^2 = e^{i\frac{\pi}{3}}) \\ \Leftrightarrow\quad & b - a + j^2c - j^2a = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & b + (-1-j^2)a + j^2c = 0 \qquad (1+j+j^2 = 0) \\ \Leftrightarrow\quad & b + ja + j^2c = 0. \end{aligned}$$

Si $\mathscr{R}\,(B) = C$, on procède de la même manière pour trouver l'autre égalité. ◇

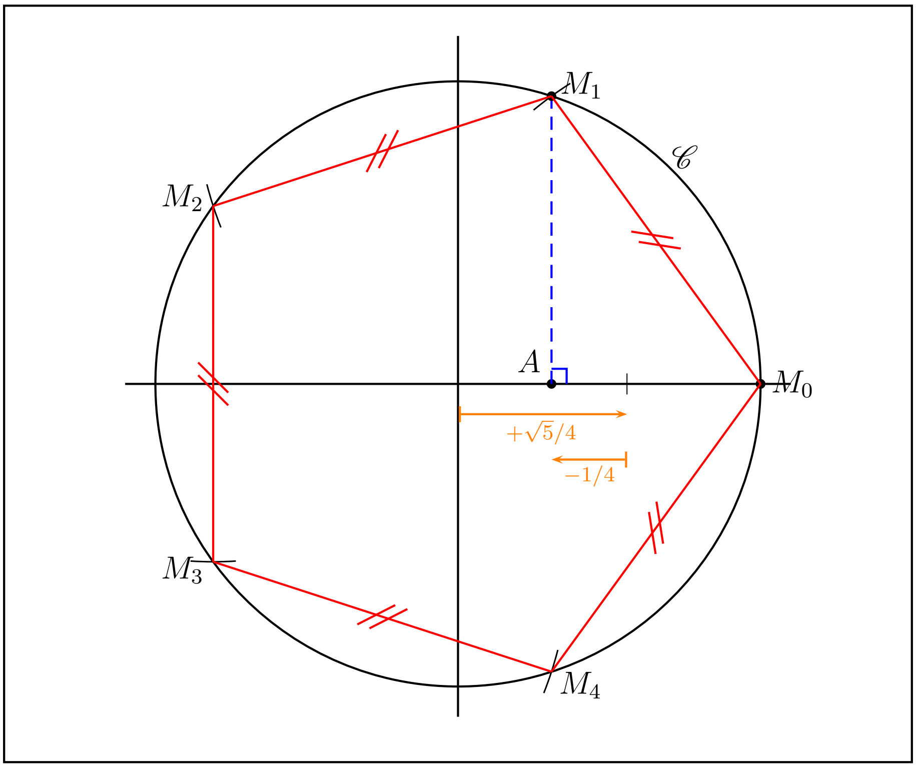
20.3.4 Pentagone régulier à la règle et au compas

Exercice : On pose $\rho = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{4}\rho^k = 0$;
2. Montrer que $\rho + \dfrac{1}{\rho}$ est racine du polynôme $X^2 + X - 1$;
3. En déduire une expression de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$;
4. En déduire une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

__Solution__ :

1. On utilise l'application 2 ci-dessus, ou la somme des cinq premiers termes d'une suite géométrique.
2. On factorise l'expression de la première question par $\rho^2 \neq 0$, on simplifie les deux membres par $\frac{1}{\rho^2}$ et ce qui reste répond à la question.
3. On détermine d'abord que $\rho + \frac{1}{\rho} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$ par le calcul direct (on connaît ρ !). Ensuite, on sait que ce nombre est la racine positive du polynôme $X^2 + X - 1$. Après calcul, on détermine alors que
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
Pour « construire » une telle longueur, il suffit alors de tracer un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent respectivement $1/2$ et $1/4$. Le théorème de Pytagore nous assure alors que l'hypothénuse mesure $\sqrt{5}/4$. On sait aussi construire $1/4$, et faire une différence de mesures à la règle et au compas, ce qui nous donne notre construction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
4. On place d'abord le point d'abscisse 1, noté M_0. Ensuite, on place le point A d'abscisse $\cos(2\pi/5)$ et son projeté M_1 sur le cercle unité $\mathscr{C}$ parallèlement à l'axe des ordonnées. Il suffit ensuite de reporter sur la mesure M_0M_1 sur le cercle pour obtenir les trois autres points M_2, M_3 et M_4. Voici la figure illustrant cette question :


M_1
$\mathscr{C}$
M_2
A
M_0
$+\sqrt{5}/4$
$-1/4$
M_3
M_4

◇