LEÇON N° 21 :

Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite ou d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.

Pré-requis :
- *Propriétés des espaces affines et vectoriels ;*
- *Barycentre et déterminant (définition analytique) ;*
- *Produit vectoriel : notation $\wedge$ et définition analytique.*

On se place dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 2 ou 3, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Il est sous-entendu tout au long de la leçon que lorsqu'on parle de « droite », $\mathscr{E}$ peut être indifféremment de dimension deux ou trois, alors que lorsqu'on parle de « plan », $\mathscr{E}$ est nécessairement supposé être de dimension trois. Les cas exceptionnels seront précisés.

21.1 Caractérisations vectorielles

21.1.1 d'une droite

Définition 1 : Soient $A \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. L'ensemble $\{M \in \mathscr{E} \;:\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\}$ est la *droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$*, notée $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$.

Théorème 1 : Soient $A, B \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- **(i)** $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) \subset \mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$;
- **(ii)** $A \in \mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ **et** $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ **est un système lié ;**
- **(iii)** $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$.

démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) : *Soit $A \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$. Alors $A \in \mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ par hypothèse, donc il existe $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BA} = \mu_2 \overrightarrow{v}$. Soit alors M un point de $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ différent de A. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$. Mais M est aussi sur $\mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ par hypothèse, donc il existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = \mu_1 \overrightarrow{v}$. Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \mu_2 \overrightarrow{v} = \mu_1 \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \frac{1}{\lambda}(\mu_1 - \mu_2)\overrightarrow{v}$, ce qui prouve que le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est lié.*

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : *Puisque $A \in \mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BA} = \mu \overrightarrow{v}$ ($\flat$). Or $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est lié, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$ ($\sharp$). Il vient alors que*

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}(B, \overrightarrow{v}) &= \{M \in \mathrm{P} \ : \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{v}\} \\
&= \{M \in \mathrm{P} \ : \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{v}\} \\
&\overset{(\flat)}{=} \{M \in \mathrm{P} \ : \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = (\lambda - \mu) \overrightarrow{v}\} \\
&\overset{(\sharp)}{=} \{M \in \mathrm{P} \ : \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha(\lambda - \mu) \overrightarrow{u}\} \\
&= \{M \in \mathrm{P} \ : \ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \beta \overrightarrow{u}\} = \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}).
\end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) : *Evident, puisqu'une égalité est une double-inclusion.* ■

`Remarque 1` : Ce théorème justifie l'unicité de la droite passant par un point et de vecteur directeur donné. De plus, l'ensemble des vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ est donné par

$$\{\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}} \ : \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u}\}.$$

Définition 2 : Cet ensemble est appelé *droite vectorielle de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$, notée $\overrightarrow{\mathscr{D}}$. $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ est appelée la *direction de* $\mathscr{D}$.

Corollaire 1 :

(i) Si $B \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$, alors $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(B, \overrightarrow{u})$;

(ii) Si $\overrightarrow{v}\,(\neq \overrightarrow{0})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, alors $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(A, \overrightarrow{v})$.

démonstration *:*

(i) Par hypothèse, $B \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$, et le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})$ est lié. Le théorème permet d'en déduire le résultat.

(ii) Par hypothèse, le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est lié, et $A \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$. Là encore, le théorème permet de conclure.

■

Corollaire 2 : Il existe une unique droite passant par deux points A et B donnés, c'est $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

démonstration *: $A \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB}$, donc $B \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{AB})$, et cette droite passe effectivement par A et B. Montrons alors qu'elle est unique. Si $\mathscr{D}(M, \overrightarrow{u})$ passe par A et B, alors $\mathscr{D}(M, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ par le corollaire 1, point (i). Or $B \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$ est un système lié. Au final, $\mathscr{D}(M, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathscr{D}(A, \overrightarrow{AB})$ par le point (ii) du même corollaire.* ■

21.1.2 d'un plan

Définition 3 : Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$ deux vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. L'ensemble

$$\mathscr{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = \{M \in \mathscr{E} \ : \ \exists\,(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda'\overrightarrow{u'}\}$$

est le *plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$*.

Théorème 2 : Il existe un unique plan passant par trois points A, B et C donnés (ou par un point A et une droite (BC) ne contenant pas A). Il est donné par $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

démonstration *: $B \in \mathscr{P}$ car $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$, et $C \in \mathscr{P}$ car $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$. Mais les droites (AB) et (AC) (par exemple) sont déterminées de manière unique, donc le plan formé par ces deux droites aussi, et puisque l'intersection de ces deux droites est A, ce plan n'est autre que $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.* ■

21.2 Représentations paramétriques

On munit $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Théorème 3 : Soient $A, M \in \mathscr{E}$ de coordonnées (x_A, y_A) et (x, y) ((x_A, y_A, z_A) et (x, y, z) si nécessaire), $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et $\overrightarrow{v}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\overrightarrow{v'}(\alpha', \beta', \gamma') \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Alors les différentes représentations paramétriques possibles sont données par ce tableau :

$\dim(\mathscr{E}) = 2$	$\dim(\mathscr{E}) = 3$	$\dim(\mathscr{E}) = 3$
$M \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta. \end{cases}$	$M \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{v}) \Leftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma. \end{cases}$	$M \in \mathscr{P}(A, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) \Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \lambda'\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \lambda'\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \lambda'\gamma'. \end{cases}$

démonstration *: Les résultats découle directement des définitions associées. En effet, par exemple dans le cas où $\mathscr{E}$ est de dimension deux,*

$$M \in \mathscr{D}(A, \overrightarrow{u}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_A = \lambda\alpha \\ y - y_A = \lambda\beta. \end{cases}$$

■

Définition 4 : On appelle respectivement ces systèmes *représentation paramétrique de la droite du plan passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, de la droite de l'espace passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$, du plan de l'espace passant par A et engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$*.

21.3 Demi-droites, segments

Soient $A \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ un vecteur non nul.

Définition 5 : On appelle *demi-droite d'origine A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$* l'ensemble $\{M \in \mathscr{E} : \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\}$, aussi noté $\mathscr{D}_+(A, \overrightarrow{u})$.

`Remarques 2:`

– Pour tout $M \in \mathscr{D}_+(A, \overrightarrow{u})$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont de même sens ;

– Si $B \in \mathscr{E}$ est différent de A, alors $\mathscr{D}_+(A, \overrightarrow{AB})$ est la demi-droite d'origine A et passant par B, notée $[AB)$.

Définition 6 : On appelle *segment d'extrémités A et B* l'ensemble $\{M \in \mathscr{E} : \exists\, \lambda \in [0,1] \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}$, aussi noté $[AB]$.

Exercice : Donner les représentations paramétriques des quantités introduites dans les définitions 4 et 5.

<u>**Solution**</u> : On a les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathscr{D}_+(A, \overrightarrow{u}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda\alpha \\ y & = & y_A + \lambda\beta \\ (z & = & z_A + \lambda\gamma) \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+) \qquad \text{et} \qquad [AB] : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ (z & = & z_A + \lambda(z_B - z_A)) \end{array} \right. \quad (\lambda \in [0,1]),$$

qui découlent directement des définitions correspondantes (comme pour le théorème 2). $\diamond$

Théorème 4 :

(i) $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B à coefficients de mêmes signes ;

(ii) $[AB] = [AB) \cap [BA)$.

démonstration :

(i) Soit $M \in [AB]$. Alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underbrace{(1-\lambda)}_{\geqslant 0} \overrightarrow{AM} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda - 1)}_{\leqslant 0} \overrightarrow{AM} \underbrace{-\lambda}_{\leqslant 0} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}.$$

Réciproquement, on suppose $a, b > 0$ (le cas contraire se montre de la même manière). Alors

$$a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \overset{a+b\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{a\,\overrightarrow{AM}}{a+b} + \frac{b\,\overrightarrow{BM}}{a+b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \overrightarrow{AM} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}.$$

En posant $\lambda = \dfrac{b}{a+b} \in [0,1]$, on a bien que M est barycentre du système $\{(A,a),(B,b)\}$.

(ii) Il suffit de remarquer que

$$\begin{array}{rcl} [BA) & = & \{M \in \mathscr{E} : \exists\, \mu \geqslant 0 \mid \overrightarrow{BM} = \mu \overrightarrow{BA}\} \\ & = & \{M \in \mathscr{E} : \exists\, \mu \geqslant 0 \mid \overrightarrow{AM} = (1-\mu) \overrightarrow{AB}\} \\ & = & \{M \in \mathscr{E} : \exists\, \lambda \leqslant 1 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}. \end{array}$$

Appliquée à la définition de $[AB)$, cette égalité donne bien

$$[AB) \cap [BA) = \{M \in \mathscr{E} \ : \ \exists\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}\} = [AB].$$

■

Remarques 3 :

– Les demi-droites permetent de définir entre autres les bissectrices intérieures et extérieures d'un angle (orienté ou non) de vecteurs, en se plaçant dans le plan formé par l'angle ;
– Une utilité particulière des segments est la convexité et dans la cas où $\mathscr{E}$ est de dimension deux, la définition de demi-plans.

Exercice : Donner une représentation paramétrique de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ dans un triangle ABC quelconque.

Solution : On se place dans le plan du triangle ABC, rapporté à un répère orthonormé. On sait déjà que le vecteur $\overrightarrow{u}$ dirigeant cette bissectrice est égal à $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}$. Notons Δ_A cette bissectrice intérieure issue de $\widehat{A}$. Alors (λ désigne un réel quelconque, $A(x_A, y_A)$ et $M(x, y)$) :

$$M \in \Delta_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - x_A = \lambda\left(\dfrac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} + \dfrac{x_C - x_A}{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}}\right) \\ y - y_A = \lambda\left(\dfrac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} + \dfrac{y_C - y_A}{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \left(1 - \lambda\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)\right) x_A + \dfrac{\lambda}{AB} x_B + \dfrac{\lambda}{AC} x_C \\ y = \left(1 - \lambda\left(\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}\right)\right) y_A + \dfrac{\lambda}{AB} y_B + \dfrac{\lambda}{AC} y_C, \end{cases}$$

et ce dernier système est la représentation paramétrique recherchée, données directement en fonction des coordonnées de A, B et C.

◇

21.4 Parallélisme

Définition 7 :

(i) **Deux droites $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ (avec $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls) sont dites *parallèles* si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.**

(ii) **Un plan $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ et une droite $\mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ sont dits *parallèles* si $\overrightarrow{v}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$.**

(iii) **Deux plans $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ et $\mathscr{P}'(B, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ sont dits *parallèles* si toute combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ l'est aussi de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$.**

Proposition 1 (positions relatives de deux droites $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathscr{D}'(B, \overrightarrow{v})$ de l'espace) : Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont distinctes, alors on considère le plan $\mathscr{P}$ défini par $\mathscr{D}$ et un point A' de $\mathscr{D}'$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Alors

1. **$\mathscr{P}$ contient un autre point de $\mathscr{D}' \Leftrightarrow \mathscr{D}' \subset \mathscr{P}$, et dans ce cas,**
   (a) **$\mathscr{D} \mathbin{/\!/} \mathscr{D}' \Leftrightarrow \mathscr{D} = \mathscr{D}'$ ou $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$,**
   (b) **$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en $O \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres ;**
2. **Sinon, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires, et donc non parallèles.**

`Remarques 4` : Ce théorème donne aussi la position relative de deux droites du plan...

***démonstration** :*

1. (a) *Par définition, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \mathscr{D} \parallel \mathscr{D}'$. Si un point d'une droite est dans l'autre, alors on a nécessairement $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ et sinon, $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$. La réciproque est évidente : en effet, $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$ ou $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ impliquent forcément que $\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}'$.*

   (b) *Si $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{O\}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. α et β étant déterminés de manière unique, le système $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre. Réciproquement, supposons ce dernier système libre. C'est donc une base de $\mathscr{P}$, de sorte qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. Soit alors $O \in \mathscr{D}$ tel que $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{u}$. Alors $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \beta\overrightarrow{v}$, donc $O \in \mathscr{D}'$.*

2. *Si B' désigne un autre point de $\mathscr{D}'$ distinct de A' et n'appartenant pas à $\mathscr{D}$, alors $B' \notin \mathscr{P}$, donc le plan formé par $\mathscr{D}$ et B' est différent de $\mathscr{P}$ et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont donc pas coplanaires.*

■

Proposition 2 : Soient $\overrightarrow{u}(a,b), \overrightarrow{v}(c,d) \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Les droites $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathscr{D}'(B, \overrightarrow{v})$ sont parallèles si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

***démonstration** : En effet,*

$$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda c \\ b = \lambda d \end{cases} \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0.$$

■

Proposition 3 : Soient $\overrightarrow{u}(a,b,c), \overrightarrow{u'}(a',b',c') \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Les droites $\mathscr{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathscr{D}'(B, \overrightarrow{u'})$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{0}$.

***démonstration** : Rappelons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda a', b = \lambda b'$ et $c = \lambda c'$. Par élimination de λ dans ces équations, on trouve la suivante : $ab' - a'b = ca' - c'a = bc' - b'c = 0$. Inversement, si ces trois nombres sont nuls, alors (en supposant par exemple $a \neq 0$) en posant $a' = \lambda a$, on trouve $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$, de sorte que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ soient colinéaires. Pour conclure, remarquons que $ab' - a'b = ca' - c'a = bc' - b'c = 0$ équivaut à dire que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{0}$.* ■

On ne démontrera pas les résultats suivants, qui se basent directement sur la définition 7 :

Proposition 4 : Un plan $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ et une droite $\mathscr{D}(B, \overrightarrow{v})$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ ou si $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \varnothing$.

Proposition 5 : Deux plans $\mathscr{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ et $\mathscr{P}'(B, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ sont parallèles si et seulement si $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$ ou $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$.