

LEÇON N° 21 :

Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite ou d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.

Pré-requis :

- Propriétés des espaces affines et vectoriels ;
- Barycentre et déterminant (définition analytique) ;
- Produit vectoriel : notation \wedge et définition analytique.

On se place dans un espace affine \mathcal{E} de dimension 2 ou 3, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Il est sous-entendu tout au long de la leçon que lorsqu'on parle de « droite », \mathcal{E} peut être indifféremment de dimension deux ou trois, alors que lorsqu'on parle de « plan », \mathcal{E} est nécessairement supposé être de dimension trois. Les cas exceptionnels seront précisés.

21.1 Caractérisations vectorielles

21.1.1 d'une droite

Définition 1 : Soient $A \in \mathcal{E}$, $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. L'ensemble

$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}$$

est la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

Théorème 1 : Soient $A, B \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ non nuls. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{D}(A, \vec{u}) \subset \mathcal{D}(B, \vec{v})$;
- (ii) $A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$ et (\vec{u}, \vec{v}) est un système lié ;
- (iii) $\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{v})$.

démonstration :

- (i) \Rightarrow (ii) : Soit $A \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$. Alors $A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$ par hypothèse, donc il existe $\mu_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BA} = \mu_2 \vec{v}$. Soit alors M un point de $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ différent de A . Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$. Mais M est aussi sur $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ par hypothèse, donc il existe $\mu_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} =$

$\mu_1 \vec{v}$. Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \mu_2 \vec{v} = \mu_1 \vec{v} + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{\lambda}(\mu_1 - \mu_2) \vec{v}$, ce qui prouve que le système (\vec{u}, \vec{v}) est lié.

(ii) \Rightarrow (iii) : Puisque $A \in \mathcal{D}(B, \vec{v})$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BA} = \mu \vec{v}$ (b). Or (\vec{u}, \vec{v}) est lié, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ (#). Il vient alors que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B, \vec{v}) &= \{M \in P : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{BM} = \lambda \vec{v}\} \\ &= \{M \in P : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{v}\} \\ &\stackrel{(b)}{=} \{M \in P : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = (\lambda - \mu) \vec{v}\} \\ &\stackrel{(\#)}{=} \{M \in P : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \alpha(\lambda - \mu) \vec{u}\} \\ &= \{M \in P : \exists \beta \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \beta \vec{u}\} = \mathcal{D}(A, \vec{u}). \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) : Evident, puisqu'une égalité est une double-inclusion. ■

Remarque 1 : Ce théorème justifie l'unicité de la droite passant par un point et de vecteur directeur donné. De plus, l'ensemble des vecteurs directeurs de la droite $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ est donné par

$$\{\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} : \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \lambda \vec{u}\}.$$

Définition 2 : Cet ensemble est appelé *droite vectorielle de vecteur directeur \vec{u}* , notée $\vec{\mathcal{D}}$. $\vec{\mathcal{D}}$ est appelée *la direction de \mathcal{D}* .

Corollaire 1 :

- (i) Si $B \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$, alors $\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(B, \vec{u})$;
- (ii) Si $\vec{v} (\neq \vec{0})$ est colinéaire à \vec{u} , alors $\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(A, \vec{v})$.

démonstration :

- (i) Par hypothèse, $B \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$, et le système (\vec{u}, \vec{u}) est lié. Le théorème permet d'en déduire le résultat.
- (ii) Par hypothèse, le système (\vec{u}, \vec{v}) est lié, et $A \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$. Là encore, le théorème permet de conclure. ■

Corollaire 2 : Il existe une unique droite passant par deux points A et B donnés, c'est $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

démonstration : $A \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB}$, donc $B \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$, et cette droite passe effectivement par A et B . Montrons alors qu'elle est unique. Si $\mathcal{D}(M, \vec{u})$ passe par A et B , alors $\mathcal{D}(M, \vec{u}) = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ par le corollaire 1, point (i). Or $B \in \mathcal{D}(A, \vec{u})$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \vec{u}$, c'est-à-dire $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ est un système lié. Au final, $\mathcal{D}(M, \vec{u}) = \mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$ par le point (ii) du même corollaire. ■

21.1.2 d'un plan

Définition 3 : Soient $A \in \mathcal{E}$ et \vec{u}, \vec{u}' deux vecteurs non colinéaires de $\vec{\mathcal{E}}$. L'ensemble

$$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}') = \{M \in \mathcal{E} : \exists (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}'\}$$

est le plan passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{u}' .

Théorème 2 : Il existe un unique plan passant par trois points A, B et C donnés (ou par un point A et une droite (BC) ne contenant pas A). Il est donné par $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

démonstration : $B \in \mathcal{P}$ car $\overrightarrow{AB} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}$, et $C \in \mathcal{P}$ car $\overrightarrow{AC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + 1 \cdot \overrightarrow{AC}$. Mais les droites (AB) et (AC) (par exemple) sont déterminées de manière unique, donc le plan formé par ces deux droites aussi, et puisque l'intersection de ces deux droites est A , ce plan n'est autre que $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. ■

21.2 Représentations paramétriques

On munit \mathcal{E} d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Théorème 3 : Soient $A, M \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x_A, y_A) et (x, y) ((x_A, y_A, z_A) et (x, y, z) si nécessaire), $\vec{u}(\alpha, \beta) \in \vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma), \vec{v}'(\alpha', \beta', \gamma') \in \vec{\mathcal{E}}$. Alors les différentes représentations paramétriques possibles sont données par ce tableau :

$\dim(\mathcal{E}) = 2$	$\dim(\mathcal{E}) = 3$	$\dim(\mathcal{E}) = 3$
$M \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists \lambda$ $\in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta. \end{cases}$	$M \in \mathcal{D}(A, \vec{v}) \Leftrightarrow \exists \lambda$ $\in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma. \end{cases}$	$M \in \mathcal{P}(A, \vec{v}, \vec{v}') \Leftrightarrow \exists (\lambda, \lambda')$ $\in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha + \lambda'\alpha' \\ y = y_A + \lambda\beta + \lambda'\beta' \\ z = z_A + \lambda\gamma + \lambda'\gamma'. \end{cases}$

démonstration : Les résultats découlent directement des définitions associées. En effet, par exemple dans le cas où \mathcal{E} est de dimension deux,

$$M \in \mathcal{D}(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \lambda\alpha \\ y - y_A = \lambda\beta. \end{cases}$$

■

Définition 4 : On appelle respectivement ces systèmes représentation paramétrique de la droite du plan passant par A et de vecteur directeur \vec{u} , de la droite de l'espace passant par A et de vecteurs directeurs \vec{v} et \vec{v}' , du plan de l'espace passant par A et engendré par les vecteurs \vec{v} et \vec{v}' .

21.3 Demi-droites, segments

Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ un vecteur non nul.

Définition 5 : On appelle *demi-droite d'origine A et de vecteur directeur \vec{u}* l'ensemble $\{M \in \mathcal{E} : \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}$, aussi noté $\mathcal{D}_+(A, \vec{u})$.

Remarques 2 :

- Pour tout $M \in \mathcal{D}_+(A, \vec{u})$, les vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AM} sont de même sens ;
- Si $B \in \mathcal{E}$ est différent de A , alors $\mathcal{D}_+(A, \overrightarrow{AB})$ est la demi-droite d'origine A et passant par B , notée $[AB)$.

Définition 6 : On appelle *segment d'extrémités A et B* l'ensemble $\{M \in \mathcal{E} : \exists \lambda \in [0, 1] \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}$, aussi noté $[AB]$.

Exercice : Donner les représentations paramétriques des quantités introduites dans les définitions 4 et 5.

Solution : On a les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathcal{D}_+(A, \vec{u}) : \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha \\ y = y_A + \lambda\beta \\ z = z_A + \lambda\gamma \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+) \quad \text{et} \quad [AB] : \begin{cases} x = x_A + \lambda(x_B - x_A) \\ y = y_A + \lambda(y_B - y_A) \\ z = z_A + \lambda(z_B - z_A) \end{cases} \quad (\lambda \in [0, 1]),$$

qui découlent directement des définitions correspondantes (comme pour le théorème 2). ◇

Théorème 4 :

- (i) $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B à coefficients de mêmes signes ;
- (ii) $[AB] = [AB) \cap [BA)$.

démonstration :

(i) Soit $M \in [AB]$. Alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \overrightarrow{AM} + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda-1)}_{\leq 0} \overrightarrow{AM} - \underbrace{\lambda}_{\leq 0} \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

Réciproquement, on suppose $a, b > 0$ (le cas contraire se montre de la même manière). Alors

$$a \overrightarrow{AM} + b \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AM} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \overrightarrow{AM} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

En posant $\lambda = \frac{b}{a+b} \in [0, 1]$, on a bien que M est barycentre du système $\{(A, a), (B, b)\}$.

(ii) Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} [BA] &= \{M \in \mathcal{E} : \exists \mu \geq 0 \mid \overrightarrow{BM} = \mu \overrightarrow{BA}\} \\ &= \{M \in \mathcal{E} : \exists \mu \geq 0 \mid \overrightarrow{AM} = (1-\mu) \overrightarrow{AB}\} \\ &= \{M \in \mathcal{E} : \exists \lambda \leq 1 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\}. \end{aligned}$$

Appliquée à la définition de $[AB)$, cette égalité donne bien

$$[AB) \cap [BA) = \{M \in \mathcal{E} : \exists 0 \leq \lambda \leq 1 \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}\} = [AB).$$



Remarques 3 :

- Les demi-droites permettent de définir entre autres les bissectrices intérieures et extérieures d'un angle (orienté ou non) de vecteurs, en se plaçant dans le plan formé par l'angle ;
- Une utilité particulière des segments est la convexité et dans la cas où \mathcal{E} est de dimension deux, la définition de demi-plans.

Exercice : Donner une représentation paramétrique de la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{A} dans un triangle ABC quelconque.

Solution : On se place dans le plan du triangle ABC , rapporté à un repère orthonormé. On sait déjà que le vecteur \vec{u} dirigeant cette bissectrice est égal à $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}$. Notons Δ_A cette bissectrice intérieure issue de \widehat{A} . Alors (λ désigne un réel quelconque, $A(x_A, y_A)$ et $M(x, y)$) :

$$\begin{aligned} M \in \Delta_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \lambda \left(\frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} + \frac{x_C - x_A}{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}} \right) \\ y - y_A = \lambda \left(\frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} + \frac{y_C - y_A}{\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}} \right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(1 - \lambda \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) \right) x_A + \frac{\lambda}{AB} x_B + \frac{\lambda}{AC} x_C \\ y = \left(1 - \lambda \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) \right) y_A + \frac{\lambda}{AB} y_B + \frac{\lambda}{AC} y_C, \end{cases} \end{aligned}$$

et ce dernier système est la représentation paramétrique recherchée, données directement en fonction des coordonnées de A, B et C . ◇

21.4 Parallélisme

Définition 7 :

- (i) Deux droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ (avec \vec{u}, \vec{v} non nuls) sont dites *parallèles* si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
- (ii) Un plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}')$ et une droite $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont dits *parallèles* si \vec{v} est combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{u}' .
- (iii) Deux plans $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}')$ et $\mathcal{P}'(B, \vec{v}, \vec{v}')$ sont dits *parallèles* si toute combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{u}' l'est aussi de \vec{v} et \vec{v}' .

Proposition 1 (positions relatives de deux droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(B, \vec{v})$ de l'espace) : Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont distinctes, alors on considère le plan \mathcal{P} défini par \mathcal{D} et un point A' de \mathcal{D}' n'appartenant pas à \mathcal{D} . Alors

1. \mathcal{P} contient un autre point de $\mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$, et dans ce cas,
 - (a) $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$ ou $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$,
 - (b) \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont sécantes en $O \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont libres ;
2. Sinon, \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas coplanaires, et donc non parallèles.

Remarques 4 : Ce théorème donne aussi la position relative de deux droites du plan...

démonstration :

1. (a) Par définition, \vec{u} et \vec{v} colinéaires $\Leftrightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$. Si un point d'une droite est dans l'autre, alors on a nécessairement $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ et sinon, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$. La réciproque est évidente : en effet, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$ ou $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ impliquent forcément que $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$.
- (b) Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{O\}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. α et β étant déterminés de manière unique, le système (\vec{u}, \vec{v}) est libre. Réciproquement, supposons ce dernier système libre. C'est donc une base de \mathcal{P} , de sorte qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$. Soit alors $O \in \mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{AO} = \alpha \vec{u}$. Alors $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \beta \vec{v}$, donc $O \in \mathcal{D}'$.
2. Si B' désigne un autre point de \mathcal{D}' distinct de A' et n'appartenant pas à \mathcal{D} , alors $B' \notin \mathcal{P}$, donc le plan formé par \mathcal{D} et B' est différent de \mathcal{P} et les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont donc pas coplanaires. ■

Proposition 2 : Soient $\vec{u}(a, b), \vec{v}(c, d) \in \overline{\mathcal{E}}$. Les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(B, \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

démonstration : En effet,

$$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \lambda c \\ b = \lambda d \end{cases} \Leftrightarrow ad - bc = 0 \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0. \quad \blacksquare$$

Proposition 3 : Soient $\vec{u}(a, b, c), \vec{u}'(a', b', c') \in \overline{\mathcal{E}}$. Les droites $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}'(B, \vec{u}')$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0}$.

démonstration : Rappelons que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda a', b = \lambda b'$ et $c = \lambda c'$. Par élimination de λ dans ces équations, on trouve la suivante : $ab' - a'b = ca' - c'a = bc' - b'c = 0$. Inversement, si ces trois nombres sont nuls, alors (en supposant par exemple $a \neq 0$) en posant $a' = \lambda a$, on trouve $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$, de sorte que \vec{u} et \vec{u}' soient colinéaires. Pour conclure, remarquons que $ab' - a'b = ca' - c'a = bc' - b'c = 0$ équivaut à dire que $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0}$. ■

On ne démontrera pas les résultats suivants, qui se basent directement sur la définition 7 :

Proposition 4 : Un plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}')$ et une droite $\mathcal{D}(B, \vec{v})$ sont parallèles si et seulement si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ ou si $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

Proposition 5 : Deux plans $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{u}')$ et $\mathcal{P}'(B, \vec{v}, \vec{v}')$ sont parallèles si et seulement si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ ou $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.