

# LEÇON N° 22 :

## Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

### Pré-requis :

– Déterminants ;

– Définition vectorielle d'une droite :  $\mathcal{D}$  est une droite s'il existe un point  $A$  du plan  $\mathcal{P}$  et un vecteur  $\vec{u}$  non nul tels que

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{P} : \exists k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\} = \mathcal{D}(A, \vec{u}) ;$$

– Dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{u}(a, b)$  et  $\vec{v}(c, d)$  sont colinéaires si et seulement si  $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0$ .  
 $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}(A', \vec{u}')$  sont parallèles si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires.

On se place dans un plan affine  $\mathcal{P}$ , muni d'un repère cartésien  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan.

## 22.1 Équations cartésiennes d'une droite du plan

### 22.1.1 Définition

#### Théorème 1 :

(i) Il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , tels que

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0 ;$$

(ii) Réciproquement, pour tout  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ , l'ensemble  $\{M \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$  est une droite de  $\mathcal{P}$  de vecteur directeur  $\vec{u}(-b, a)$ .

#### démonstration :

(i) Puisque  $(a, b) \neq (0, 0)$ , on peut trouver un point  $A$  qui soit dans  $\mathcal{D}$ , donc  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ . Soit  $A(x_0, y_0)$  ce point. On a alors  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$  avec  $\vec{u}(\alpha, \beta) \neq \vec{0}$ . Soit  $M(x, y) \in \mathcal{P}$ . Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\stackrel{\text{d\u00e9f.}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont col\u00e9aires} \\ &\stackrel{\text{P.R.}}{\Leftrightarrow} \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0. \end{aligned}$$

On pose alors  $a = \beta$ ,  $b = -\alpha$  et  $c = \alpha y_0 - \beta x_0$ , de sorte que  $M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ , avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

## Équations cartésiennes d'une droite du plan. Intersection, parallélisme

(ii) Posons  $D = \{M \in \mathcal{P} \mid ax + by + c = 0\}$ . Soient  $A(x_0, y_0) \in D$  et  $M(x, y) \in D$ . Alors

$$\begin{aligned} ax + by + c = ax_0 + by_0 + c = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u}(-b, a) \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow M \in \mathcal{D}(A, \vec{u}). \end{aligned}$$

Donc  $D = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ . ■

**Définition 1 :** L'équation  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  est appelée **équation cartésienne de  $\mathcal{D}$** . On note alors  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ .

Remarque 1 : On constate que

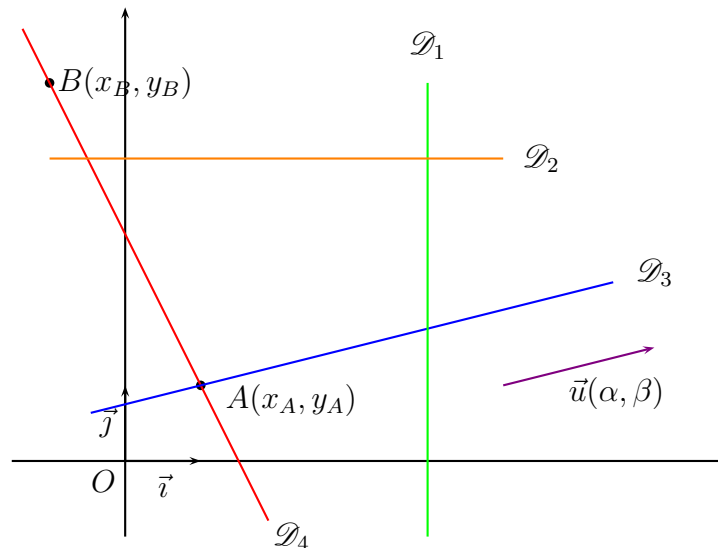
$$\mathcal{D}(A, \vec{u}) = \mathcal{D}(A', \vec{u}') \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \vec{u}, \vec{u}' \text{ colinéaires,} \\ 2. AA' \text{ colinéaire à } \vec{u}. \end{cases}$$

On en déduit que l'équation cartésienne n'est pas unique, mais déterminée à un coefficient multiplicatif près. En d'autres termes, si  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  et  $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ ,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \neq 0 \mid \lambda(a, b, c) + \mu(a', b', c') = 0.$$

### 22.1.2 Méthodes pour trouver une équation cartésienne

Voici une figure sur laquelle nous allons travailler pour déterminer chacune des équations cartésiennes des quatre droites :



On a alors ( $M$  est de coordonnées  $(x, y)$ ) :

$$\mathcal{D}_1 : M \in \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow x = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{D}_2 : M \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow y = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{D}_3 : M \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.$$

$$\mathcal{D}_4 : M \in \mathcal{D}_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0.$$

## 22.2 Intersection et parallélisme

### 22.2.1 Cas de deux droites

**Définition 2 :** Deux droites  $\mathcal{D}(A, \vec{u})$  et  $\mathcal{D}'(A', \vec{u}')$  sont dites *parallèles* (resp. *sécantes*) si  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont (resp. ne sont pas) colinéaires. On note alors  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ .

**Proposition 1 :** Deux droites  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  et  $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$  sont parallèles (resp. sécantes) si et seulement si  $ab' - a'b = 0$  (resp.  $\neq$ ).

*démonstration :* D'après le théorème 1,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont respectivement dirigées par  $\vec{u}(-b, a)$  et  $\vec{u}'(-b', a')$ , et par définition,  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{u}'$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$ . De plus,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes  $\Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{u}'$  non colinéaires  $\Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$ . ■

Remarque 2 : Dans le cas où  $ab' - a'b = 0$ , la remarque 1 permet d'affirmer que  $ac' - a'c = 0 \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{D}'$  et  $ac' - a'c \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$  (on dit alors qu'elles sont *strictement parallèles*).

**Corollaire 1 :** Toute droite  $\mathcal{D}'$  parallèle à  $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$  admet une équation cartésienne de la forme  $ax + by + \gamma = 0$ , avec  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

*démonstration :* Conséquence directe de la proposition 1. ■

### 22.2.2 De plusieurs droites

**Définition 3 :** Le faisceau  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$  engendré par deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  distinctes est

- ◇ l'ensemble des droites passant par  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ , si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes,
- ◇ l'ensemble des droites parallèles à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ , si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles.

**Proposition 2 :** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  deux droites distinctes.  $\mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$  est l'ensemble des droites du plan dont une équation cartésienne est combinaison linéaire de celles de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .

*démonstration :* Notons  $f(x, y) = ax + by + c$ ,  $f'(x, y) = a'x + b'y + c'$ , de sorte que  $\mathcal{D} : f(x, y) = 0$  et  $\mathcal{D}' : f'(x, y) = 0$ . Notons encore  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} : \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

" $\Leftarrow$ ": Supposons que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  soient sécantes en  $I(x_i, y_i)$ . Alors  $f(x_i, y_i) = 0$  et  $f'(x_i, y_i) = 0$  impliquent  $\lambda f(x_i, y_i) + \mu f'(x_i, y_i) = 0$  ( $\forall \lambda, \mu$ ), donc  $I \in \mathcal{D}_{\lambda, \mu}$ , et  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$ . Supposons alors  $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'(x, y) = 0 \end{cases} \quad n'admet pas de solution \\ \Rightarrow & \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0 \end{cases} \quad n'admet pas de solution \\ \Rightarrow & \mathcal{D}_{\lambda, \mu} \parallel \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}_{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}. \end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ ": Supposons que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  soient sécantes en  $I(x_i, y_i)$ . Alors il existe  $M(x_M, y_M)$  tel que  $M \notin \{\mathcal{D}, \mathcal{D}'\}$ , et  $M \in \mathcal{D}''$  où  $\mathcal{D}''$  est une droite passant par  $I$ . En posant  $\lambda = f'(x_M, y_M)$  et  $\mu = -f'(x_M, y_M)$ , la droite  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} : \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0$  contient  $I$  et  $M$ , donc  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} = \mathcal{D}''$ . Supposons alors  $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$ , et soit  $\mathcal{D}''$  une droite distincte de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  et parallèle à ces dernières, passant par le point  $M$ . En posant  $\lambda = f'(x_M, y_M)$  et  $\mu = -f'(x_M, y_M)$ , la droite  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} : \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0$  est parallèle à  $\mathcal{D}$  (d'après la partie " $\Leftarrow$ ") et passe par  $M$ , donc  $\mathcal{D}_{\lambda, \mu} = \mathcal{D}''$ . ■

## 22.3 Condition pour que trois droites soient concourantes

Soient  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  et  $\mathcal{D}''$  trois droites d'équation cartésiennes respectives  $ax + by + c = 0$ ,  $a'x + b'y + c' = 0$ ,  $a''x + b''y + c'' = 0$ , notées aussi respectivement  $f(x, y) = 0$ ,  $f'(x, y) = 0$  et  $f''(x, y) = 0$ .

**Théorème 2 :** On suppose  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sécantes en un point  $I(x_i, y_i)$ . Alors  $\mathcal{D}''$  passe par  $I$  si et seulement si

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

**démonstration :**

" $\Rightarrow$ ":  $I \in \mathcal{D}'' \Rightarrow \mathcal{D}'' \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'}$   $\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \mathcal{D}'' : \lambda f(x, y) + \mu f'(x, y) = 0$ . Or  $\mathcal{D}'' : a''x + b''y + c'' = 0$ , donc il existe  $\eta \in \mathbb{R}$  tel que  $\eta X'' = \lambda X + \mu X'$  ( $X \in \{a, b, c\}$ ), donc la dernière ligne de  $\Delta$  est combinaison linéaire des deux autres, d'où  $\Delta = 0$ .

" $\Leftarrow$ ":  $\Delta = 0 \Rightarrow$  l'une des lignes de  $\Delta$  (notée  $L$ ) est combinaison linéaire des deux autres (notées  $L'$  et  $L''$ ). Si  $L'$  et  $L''$  sont dépendantes, elles sont proportionnelles, et les trois droites correspondantes sont confondues (en particulier,  $I \in \mathcal{D}''$ ). Si  $L'$  et  $L''$  sont indépendantes, alors les droites correspondantes ne sont pas confondues et engendrent donc un faisceau de droites dont fait partie la droite correspondant à  $L$  (car  $L = \lambda L' + \mu L'' \Rightarrow f_L = \lambda f_{L'} + \mu f_{L''}$  et proposition 2). Dans tous les cas,  $I \in \mathcal{D}$  et  $I \in \mathcal{D}' \Rightarrow f(x_i, y_i) = f'(x_i, y_i) = 0 \Rightarrow f''(x_i, y_i) = 0$  (d'après la proposition précédente), donc  $I \in \mathcal{D}''$ . ■

Remarque 3 : Si l'on remplace  $\Delta = 0$  par  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}^* \mid f'' = \lambda f + \mu f'$ , la démonstration est alors évidente avec la proposition 2, ce qui nous évite d'avoir à parler de déterminant et donc de laisser la leçon à un niveau Terminale S.

## 22.4 Applications

**Théorème 3 :** Soient  $\mathcal{D} : f(x, y) = 0$  et  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$  deux points distincts de  $\mathcal{D}$ . Alors :

(i)  $(AB) // \mathcal{D} \Leftrightarrow f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B)$  ;

(ii)  $B \notin \mathcal{D}$  et  $(AB) \cap \mathcal{D} = \{I\} \Rightarrow \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \frac{f(x_A, y_A)}{f(x_B, y_B)}$ .

**démonstration** : Notons  $(AB) : f'(x, y) = a'x + b'y + c' = 0$ .

(i)  $(AB) // \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R} \mid f'(x, y) = f(x, y) + \gamma$  (d'après le corollaire 1). Or  $A, B \in (AB)$  donnent :

$$\left. \begin{array}{l} f'(x_A, y_A) = 0 \Rightarrow f(x_A, y_A) + \gamma = 0 \\ f'(x_B, y_B) = 0 \Rightarrow f(x_B, y_B) + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_A, y_A) = f(x_B, y_B),$$

d'où le résultat.

(ii) Posons  $\vec{f} : \vec{u}(x, y) \mapsto ax + by$ .  $\vec{f}$  est clairement linéaire, et l'on vérifie sur les équations que  $\vec{f}(\overrightarrow{NM}) = f(M) - f(N)$  (où  $f(M)$  désigne  $f(x_M, y_M)$  pour tout point  $M \in \mathcal{P}$ ).  $A, B \notin I$ , et ces trois points sont alignés, donc il existe  $k \in \mathbb{R}^*$  tel que  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$  (en particulier  $k = \overline{IA}/\overline{IB}$ ). Alors

$$f(A) = f(A) - \underbrace{f(I)}_{=0 \text{ (I} \in \mathcal{D})} = \vec{f}(\overrightarrow{IA}) = \vec{f}(k\overrightarrow{IB}) = k\vec{f}(\overrightarrow{IB}) = k(f(B) - f(I)) = kf(B).$$

D'où le résultat :

$$k = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}} = \frac{f(A)}{f(B)} = \frac{f(x_A, y_A)}{f(x_B, y_B)}.$$

■

**Corollaire (Théorème de Ménélaus) : Soient  $ABC$  un triangle,  $P \in (BC)$ ,  $Q \in (AC)$  et  $R \in (AB)$  trois points distincts de  $A, B, C$ . Alors  $P, Q, R$  sont alignés si et seulement si**

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1. \quad (\star)$$

**démonstration** : Soient  $f(x, y) = 0$  une équation de  $(PQ)$  et  $f(A) = f(x_A, y_A)$  une notation. Alors

$$(PQ) \cap (AB) = \{R\} \Rightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{f(A)}{f(B)}$$

par le théorème précédent. De même, on montre que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{f(B)}{f(C)} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{f(C)}{f(A)}.$$

D'où le résultat. Réciproquement, les droites  $(AB)$  et  $(PQ)$  sont sécantes (en effet, si elles étaient parallèles, on aurait  $\overline{QC}/\overline{QA} = \overline{PC}/\overline{PB}$  d'après Thalès, donc  $\overline{RA}/\overline{RB} = 1$  par  $(\star)$ , ce qui est impossible) en un point noté  $R'$ . Le sens direct nous assure alors que  $R'$  vérifie  $(\star)$  avec  $P$  et  $Q$ , d'où

$$\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}},$$

c'est-à-dire  $R = R'$  (car  $A \neq B$ ). ■

**Corollaire (théorème de Céva) : Soient  $ABC$  un triangle,  $P \in (BC)$ ,  $Q \in (AC)$  et  $R \in (AB)$  trois points distincts de  $A, B, C$ . Alors  $(AP)$ ,  $(BQ)$  et  $(CR)$  sont concourantes ou parallèles si et seulement si :**

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1. \quad (\star)$$

**démonstration** : Si  $K$  est le point de concours, il suffit d'appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle  $APB$  avec la sécante  $(CR)$  puis à  $APC$  avec  $(BQ)$ . Si elles sont parallèles, il suffit d'utiliser le théorème de Thalès. Réciproquement, la démonstration est analogue à la précédente : on montre par l'absurde que  $(CK)$  et  $(AB)$ , avec  $\{K\} = (AP) \cap (BQ)$ , sont sécantes en un point  $R'$ , puis que  $R' = R$ . ■