

LEÇON N° 23 :

Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.

Pré-requis :

- Espaces vectoriels de dimension 2 et 3, propriétés ;
- Vecteurs et colinéarité de deux vecteurs ;
- Résolution de systèmes linéaires.

Soient \mathcal{E} l'espace affine de dimension 3 et E l'espace vectoriel associé. \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \mathcal{R}$.

23.1 Droites et plans de l'espace

23.1.1 Définition

Définition 1 : On appelle *droite* toute partie \mathcal{D} de \mathcal{E} telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ vérifiant

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}\}.$$

On note alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et \vec{u} est appelé *vecteur directeur* de \mathcal{D} .

Remarque 1 : Une droite est déterminée par la donnée de deux points distincts A et B .

Définition 2 : On appelle *plan* toute partie $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathcal{E}$ et deux vecteurs \vec{u}, \vec{v} linéairement indépendants vérifiant

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\}.$$

On note alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ et \vec{u}, \vec{v} sont appelés *vecteurs directeurs* de \mathcal{P} .

Remarque 2 : Un plan est déterminé par la donnée de trois points non alignés, ou d'après la remarque précédente, par un point A et une droite ne contenant pas A .

23.1.2 Représentation paramétrique

Soient $\mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(a, b, c)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Alors :

$$\begin{array}{ll}
 M(x, y, z) \in \mathcal{D} & M(x, y, z) \in \mathcal{P} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \vec{u} \text{ colinéaires} & \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) \text{ liée} \\
 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} & \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \\
 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = a + \lambda \alpha \\ y = b + \lambda \beta \\ z = c + \lambda \gamma. \end{cases} & \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x = a + \lambda \alpha + \mu \alpha' \\ y = b + \lambda \beta + \mu \beta' \\ z = c + \lambda \gamma + \mu \gamma'. \end{cases}
 \end{array}$$

Ce système est appelé *représentation paramétrique de \mathcal{D}* (resp. \mathcal{P}).

23.1.3 Équations cartésiennes d'un plan

Théorème 1 : Soit $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ un plan avec $A(a, b, c)$, $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$. Il existe $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0.$$

Réciproquement, si $(p, q, r, s) \in \mathbb{R}^4$ avec $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$, alors $\{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid px + qy + rz + s = 0\}$ est un plan de \mathcal{E} .

démonstration : Notons déjà, par exemple, que \vec{u}, \vec{v} non colinéaires entraîne $\alpha'\beta - \alpha\beta' \neq 0$. De plus, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{P} & \stackrel{23.1.2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - a = \lambda \alpha + \mu \alpha' & (L_1) \\ y - b = \lambda \beta + \mu \beta' & (L_2) \\ z - c = \lambda \gamma + \mu \gamma' & (L_3) \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \beta(x - a) - \alpha(y - b) = \mu(\alpha'\beta - \alpha\beta') & (L'_1) \\ \gamma(y - b) - \beta(z - c) = \mu(\beta'\gamma - \beta\gamma') & (L'_2) \end{cases} \quad \left(\text{avec } \begin{array}{l} L'_1 = \beta L_1 - \alpha L_2 \\ L'_2 = \gamma L_2 - \beta L_3 \end{array} \right) \\
 & \Leftrightarrow (\beta'\gamma - \beta\gamma')(\beta(x - a) - \alpha(y - b)) - (\alpha'\beta - \alpha\beta')(\gamma(y - b) - \beta(z - c)) = 0 \\
 & \quad (\text{en faisant } (\beta'\gamma - \beta\gamma')L'_1 - (\alpha'\beta - \alpha\beta')L'_2) \\
 & \Leftrightarrow px + qy + rz + s = 0,
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 p &= \beta(\beta'\gamma - \beta\gamma'), \\
 q &= \gamma(\alpha'\beta - \alpha\beta') - \alpha(\beta'\gamma - \beta\gamma'), \\
 r &= \beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta) \text{ et} \\
 s &= (\beta'\gamma - \beta\gamma')(b\alpha - a\beta) - (\alpha'\beta - \alpha\beta')(c\beta - b\gamma).
 \end{aligned}$$

De plus, $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$. Pour la réciproque, on pose p, q, r, s comme trouvé (et qui vérifient alors $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$), et on remonte les lignes jusqu'à $M \in \mathcal{P}$. ■

Définition 3 : L'équation $px + qy + rz + s = 0$ est appelée *équation cartésienne de \mathcal{P}* .

Remarque 3 : Nous verrons plus loin (23.2.1) que l'équation cartésienne d'un plan n'est pas unique.

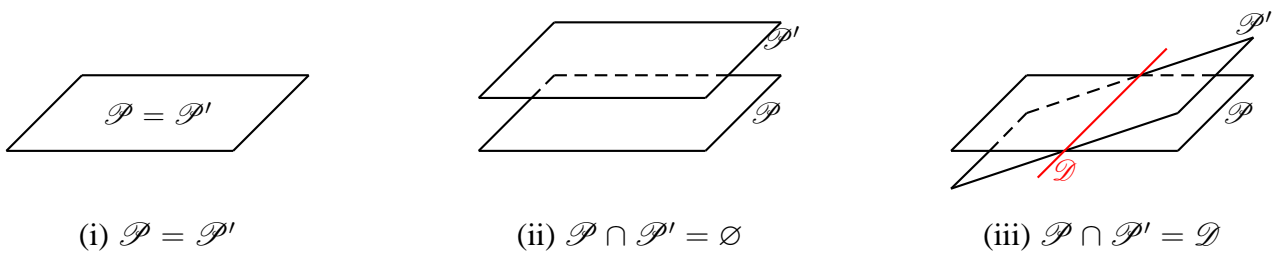
23.2 Positions relatives...

23.2.1 ... de deux plans

Proposition 1 : Soient $\mathcal{P} : px + qy + rz + s = 0$ et $\mathcal{P}' : p'x + q'y + r'z + s' = 0$ deux plans de \mathcal{E} . Alors :

- (i) $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \mid (p', q', r', s') = k(p, q, r, s)$;
- (ii) $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \mid (p', q', r') = k(p, q, r)$ et $s' \neq ks$;
- (iii) $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D} \Leftrightarrow (p', q', r')$ et (p, q, r) non proportionnels.

Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



démonstration : On a déjà que

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \Leftrightarrow \begin{cases} px + qy + rz + s = 0 \\ p'x + q'y + r'z + s' = 0 \end{cases} \quad (S)$$

Supposons $p \neq 0$. Alors (S) se transforme facilement en

$$(S') : \begin{cases} px + qy + rz + s = 0 \\ \gamma y + \beta z + \delta = 0, \end{cases}$$

avec $\beta = rp' - r'p$, $\gamma = pq' - p'q$ et $\delta = ps' - p's$.

Supposons $\beta = \gamma = 0$, et posons $p' = kp$. Alors

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r'p = rp' \\ q'p = qp' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = kr \\ q' = kq \end{cases} \Leftrightarrow (p', q', r') = k(p, q, r).$$

Supposons $\beta = \gamma = \delta = 0$: alors on montre de manière analogue que

$$(p', q', r', s') = k(p, q, r, s).$$

Distinguons alors plusieurs cas, s'aidant de ces deux résultats :

- Si $\gamma \neq 0$ (par exemple, ou $\beta \neq 0$), alors (S') (et donc (S)) admet une solution donnée par

$$z = z, \quad y = \frac{sp' - s'p}{\gamma} + \frac{rp' - r'p}{\gamma} z \quad \text{et} \quad x = \frac{qs' - q's}{\gamma} + \frac{qr' - q'r}{\gamma} z,$$

donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est la droite passant par le point

$$\left(\frac{qs' - q's}{\gamma}, \frac{sp' - s'p}{\gamma}, 0 \right)$$

et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, où $\alpha = qr' - q'r$ et β, γ déjà définies.

- Si $\beta = \gamma = 0$ et $\delta \neq 0$, alors (p', q', r') et (p, q, r) sont proportionnels, mais pas (p', q', r', s') et (p, q, r, s) , donc il existe λ, μ distincts et non nuls tels que $(p', q', r', s') = (\lambda p, \lambda q, \lambda r, \mu s)$. Dans le système (S) , on trouve alors que

$$\begin{cases} \lambda s = 0 \\ \mu s = 0 \end{cases} \stackrel{s \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda = \mu = 0,$$

ce qui est impossible. Par ailleurs, si $s = 0$, on aura automatiquement que $s' = \mu s = 0$, contredisant le fait que (p', q', r', s') et (p, q, r, s) ne sont pas proportionnels. On en déduit alors que (S) n'admet pas de solution, c'est-à-dire $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$.

- Si $\beta = \gamma = \delta = 0$, alors (p', q', r', s') et (p, q, r, s) sont proportionnels, de sorte que (S) se réduise à la seule équation $px + qy + rz + s = 0$, et on en déduit que $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

Puisque tous les cas sont envisagés, ces implications sont des équivalences et le résultat annoncé s'en déduit. ■

Définition 4 : Dans le cas (ii), on dit que \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont strictement parallèles. Pour (i) et (ii), on note $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$.

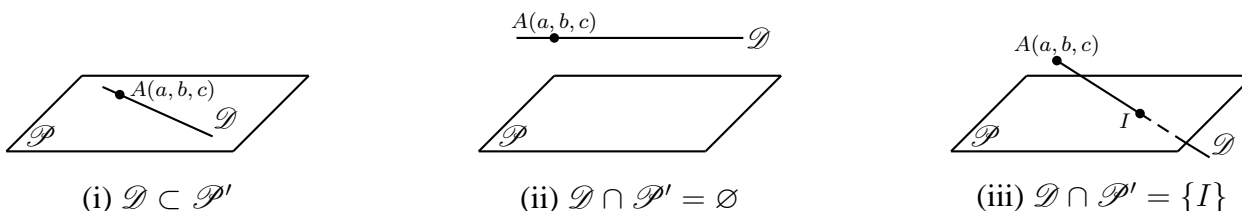
Remarque 4 : Le cas (i) montre que l'équation cartésienne d'un plan n'est unique qu'à coefficient multiplicatif près.

23.2.2 ... d'une droite et d'un plan

Proposition 2 : Soient $\mathcal{P} : px + qy + rz + s = 0$ un plan et \mathcal{D} la droite dont la représentation paramétrique est $x = a + \lambda\alpha$, $y = b + \lambda\beta$ et $z = c + \lambda\gamma$. Alors

- (i) $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s = 0$;
 (ii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s \neq 0$;
 (iii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma \neq 0$.

Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



démonstration : On a déjà que

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} &\Leftrightarrow p(a + \lambda\alpha) + q(b + \lambda\beta) + r(c + \lambda\gamma) + s = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(p\alpha + q\beta + r\gamma) + (pa + qb + rc + s) = 0. \end{aligned}$$

De plus, notons que

$$p\alpha + q\beta + r\gamma = 0 \Leftrightarrow \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \in \vec{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}.$$

- (i) $\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$ et $(a, b, c) \in \mathcal{D} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s = 0$.
(ii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{D} \parallel \mathcal{P}$ et $(a, b, c) \notin \mathcal{P} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma = 0$ et $pa + qb + rc + s \neq 0$.
(iii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\} \Leftrightarrow p\alpha + q\beta + r\gamma \neq 0$,

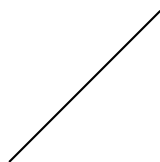
d'où le résultat annoncé. ■

23.2.3 ... de deux droites

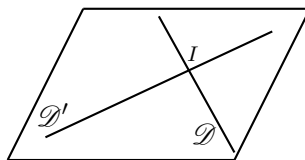
Proposition 3 : Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{E} . Alors soit

- (i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$;
(ii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\} \Leftrightarrow \mathcal{D}$ et \mathcal{D}' sont coplanaires et $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{D}'$;
(iii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ coplanaires et } \mathcal{D} \parallel \mathcal{D}', \\ \text{ou } \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ non coplanaires et } \mathcal{D} \not\parallel \mathcal{D}'. \end{cases}$

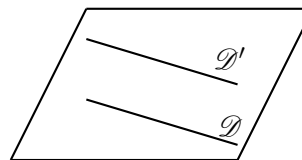
Voici les illustrations correspondants à chacun de ces trois cas :



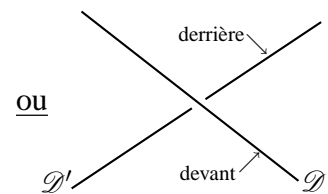
(i) $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$



(ii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\}$



(iii) $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$



ou

démonstration : Le cas (i) est évident puisque deux droites ont tout à fait le droit d'être les mêmes ! Supposons alors qu'elles sont distinctes. Considérons le plan \mathcal{P} défini par \mathcal{D} et un point A' de \mathcal{D}' n'appartenant pas à \mathcal{D} . Soit \mathcal{P} contient un autre point de \mathcal{D}' , et donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$, c'est-à-dire \mathcal{D} et \mathcal{D}' coplanaires. L'intersection ou le parallélisme se déduit alors de la position de \mathcal{D} et \mathcal{D}' dans \mathcal{P} . Soit \mathcal{P} ne contient pas d'autre point de \mathcal{D}' , et dans ce cas, \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas coplanaires et donc a fortiori non parallèles (sinon elles seraient justement coplanaires). ■

23.3 Plans contenant une droite donnée

D'après la proposition 1, toute droite est intersection de deux plans non parallèles. Soient alors \mathcal{D} une droite donnée et \mathcal{P}, \mathcal{Q} non parallèles tels que $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{D}$. Notons $P(x, y, z) = 0$ et $Q(x, y, z) = 0$ des équations cartésiennes respectives de \mathcal{P} et \mathcal{Q} , aussi notées $P(M)$ et $Q(M)$ si $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$.

Définition 5 : On appelle *faisceau de plans engendré par \mathcal{D}* l'ensemble des plans contenant \mathcal{D} . On le note $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Remarque 5 : D'après notre petite introduction, on a alors $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Théorème 2 : $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} = F$, où F désigne l'ensemble des plans dont une équation cartésienne est combinaison linéaire de celles de \mathcal{P} et \mathcal{Q} .

démonstration : On va montrer la double inclusion :

" \subset " : Soit $\Sigma \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ avec $\Sigma \neq \mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Alors il existe $M \in \mathcal{E}$ tel que $M \notin \mathcal{P}, \mathcal{Q}$ et $M \in \Sigma$ (avec \mathcal{D} , cela détermine entièrement Σ). En posant $\lambda = Q(M)$ et $\mu = -P(M)$, alors le plan $\Pi : \lambda P + \mu Q = 0$ contient M (car $\lambda P(M) + \mu Q(M) = Q(M)P(M) - P(M)Q(M) = 0$) et \mathcal{D} (car $\forall A \in \mathcal{D}, A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \Leftrightarrow P(A) = Q(A) = 0 \Rightarrow \lambda P(A) + \mu Q(A) = 0 \Rightarrow A \in \Pi$ donc $\mathcal{D} \subset \Pi$), d'où $\Sigma = \Pi \in F$ et finalement, $\mathcal{F}_{\mathcal{D}} \subset F$.

" \supset " : Soit $\Pi \in F$. Alors Π contient en particulier \mathcal{P} et \mathcal{Q} , donc aussi \mathcal{D} , donc $\Pi \in \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$ et par conséquent, $F \subset \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$.

Le résultat est ainsi démontré. ■

Remarque 6 : Si \mathcal{P} et \mathcal{Q} sont parallèles, alors l'ensemble F définit ce que l'on appelle le *faisceau de plans parallèles à \mathcal{P} et \mathcal{Q}* , qui est l'ensemble des plans parallèles à \mathcal{P} et \mathcal{Q} (la démonstration s'effectue à l'aide de la proposition 1, on la laissera en exercice).