LEÇON N° 35 :

Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.

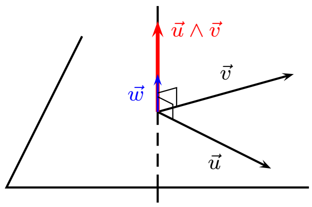
Pré-requis :
- *Généralités sur les espaces euclidiens affines et vectoriels de dimension inférieure ou égale à trois ;*
- *Orientation de l'espace (base orthonormée directe, indirecte) : règle des trois doigts de la main droite ;*
- *Angle orienté de deux vecteurs non nuls dans le plan euclidien, cosinus, sinus (dans un triangle rectange) ;*
- *Notions sur les surfaces, solides usuels, produit scalaire.*

35.1 Point de vue géométrique

Définition 1 : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est l'unique vecteur défini par :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire ;

(ii) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|\right) \vec{w}$ sinon, où $\vec{w}$ désigne le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit direct.



Remarques 1 :
- <u>direction</u> : donnée par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- <u>sens</u> : donné par le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ direct ;
- <u>norme</u> : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.

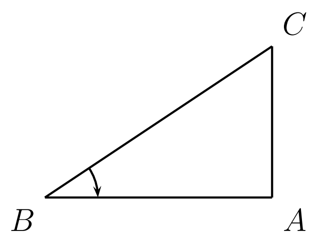
Remarques 2 :

1. $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ est indépendant de l'orientation du plan $(\vec{u}, \vec{v})$:
$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$
2. $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ dépend de l'orientation du plan $(\vec{u}, \vec{v})$:
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|.$$

Exemple : La force magnétique qui s'exerce sur une charge q animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par la relation $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Le trièdre $(q\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ est direct.

Convention : On suppose que le sinus est toujours positif :

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}.$$



35.2 Propriétés

35.2.1 Orthogonalité

Théorème 1 : Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

démonstration : *C'est la définition même du produit vectoriel.* ■

35.2.2 Colinéarité

Théorème 2 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

démonstration :

"$\Longrightarrow$" : *C'est la définition.*

"$\Longleftarrow$" : *Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Alors $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \neq 0$ car c'est un produit de trois facteurs non nuls. D'où $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.*

■

35.2.3 Bases orthonormées

Théorème 3 : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires non nuls orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

démonstration : *D'après le théorème 1, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont deux à deux orthogonaux. De plus,*

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \Rightarrow \quad |\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 1.$$

Enfin, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe par définition. ■

`Remarque 3` : Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée directe de l'espace, alors on a

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \text{et} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}.$$

35.2.4 Antisymétrie

Théorème 4 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

démonstration : *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors le résultat est immédiat. Supposons alors qu'ils ne le soient pas. Par définition, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ sont directs. En particulier, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \wedge \vec{u})$ est indirecte, et puisque $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il vient que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ sont de même direction mais de sens opposés. Enfin, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{v} \wedge \vec{u}\|$, d'où le résultat.* ■

`Remarque 4` : Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ désigne une base orthonormée directe de l'espace, alors on a

$$\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{-}i, \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{-}k, \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{-}j.$$

35.2.5 Colinéarité (les résultats de ce paragraphe seront admis)

Théorème 5 : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et λ un réel. Alors le produit vectoriel est une forme bilinéaire alternée, c'est-à-dire :

(i) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$;

(ii) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$;

(iii) $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$;

(iv) $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.

`Remarque 5` : On montre d'abord l'équivalence entre la définition du produit vectoriel donnée dans cette leçon et celle utilisant le produit mixte. Le sens indirect[1] suffira ici, puisque si ces égalités sont vraies en utilisant la définition du produit mixte, elles le seront alors aussi utilisant la définition de cette leçon.

démonstration : *Il est bon de rappeler ici que le produit mixte est une forme trilinéaire alternée. Pour tout vecteur $\vec{\alpha}$, on a donc par linéarité du produit mixte :*

$$[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{\alpha}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{\alpha}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{\alpha}],$$

impliquant par définition du produit vectoriel que

$$\big((\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w}\big) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{\alpha} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{\alpha},$$

d'où l'égalité (i). Les égalités (ii) et (iii) se montrent de la même manière. Enfin, l'égalité (iv) a été démontrée dans le théorème 4. ■

[1] : Partons de la définition utilisant le produit mixte ($\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que pour tout $\vec{w}$, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$). En appliquant successivement à $\vec{w} = \vec{u}$ puis $\vec{w} = \vec{v}$, on trouve que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{0}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (en effet, le déterminant du produit mixte est nul puisque deux des lignes sont les mêmes). Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donc orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

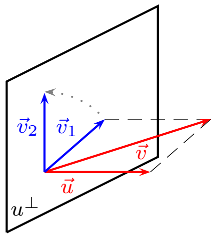
De plus, si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base directe, alors le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est strictement positif, impliquant directement que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe. Enfin, si $\vec{w}$ est de norme 1, alors $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$. On retrouve le volume du parallélépipède appuyé sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, égal à (hauteur $\times$ aire de la base) $\|\vec{w}\| \; \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \; |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$, d'où l'égalité $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$.

Remarque 6 : Avec le théorème qui suit, on aurait pu montrer la bilinéarité du produit vectoriel en montrant que les coordonnées des deux vecteurs de chaque égalité sont les mêmes, mais ce travail est trop lourd en terme de lignes de calcul. Une autre possibilité élégante est de montrer que l'application $f_{\vec{u}} : \vec{v} \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ (avec $\vec{u}$ un vecteur arbitrairement fixé) est linéaire :

démonstration : *Montrons que* $f_{\vec{u}}$ *est la composition*

$$f_{\vec{u}} = h_{\|\vec{u}\|} \circ r_{(\vec{u},\pi/2)} \circ p_{\vec{u}^\perp}$$

de trois applications linéaires, respectivement une homothétie, une rotation et une projection orthogonale.



Pour obtenir le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$, *on commence par construire un vecteur* $\vec{v}_2$ *de la droite* $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^\perp$ *tel que la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}_2)$ *soit directe : pour cela, il suffit de projeter orthogonalement* $\vec{v}$ *sur* $\vec{u}^\perp$, *nous donnant ainsi un vecteur* $\vec{v}_1$ *orthogonal à* $\vec{u}$, *puis de faire subir à ce vecteur une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *autour de* $\vec{u}$, *nous donnant alors le vecteur* $\vec{v}_2$ *avec les propriétés recherchées (figure ci-contre).*

Il reste à dilater $\vec{v}_2$ *pour le transformer en un vecteur* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *de longueur convenable. Mais on a*

$$\|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}\| \, |\sin(\vec{u}, \vec{v})|.$$

Il suffit donc de dilater $\vec{v}_2$ *en le multipliant par* $\|\vec{u}\|$. *L'application* $f_{\vec{u}}$ *est donc bien linéaire. Il suffit alors d'inverser les rôles de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *pour montrer qu'elle est en fait bilinéaire.* ■

35.3 Expression analytique

Théorème 6 : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z'). Alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées

$$(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx').$$

démonstration : *On a les égalités suivantes :*

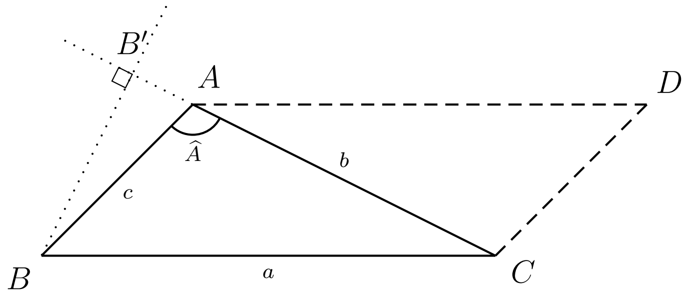
$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\
&= xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) \\
&= xy'\vec{k} + xz'(-\vec{j}) + yx'(-\vec{k}) + yz'\vec{i} + zx'\vec{j} + zy'(-\vec{i}) \\
&= (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.
\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi démontré. ■

35.4 Applications

35.4.1 Aire du triangle et du parallélogramme

Faisons au préalable une figure illustrant ce que nous allons faire :



En utilisant les propriétés de la fonction sinus, on trouve que

$$\sin \widehat{A} = \sin(\pi - \widehat{A}) = \frac{BB'}{c} \quad \Leftrightarrow \quad BB' = c \sin \widehat{A}.$$

On en déduit que

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\, b\, BB' = \frac{1}{2}\, bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\|\, \|\overrightarrow{AC}\|\, |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\, \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|,$$

ainsi que

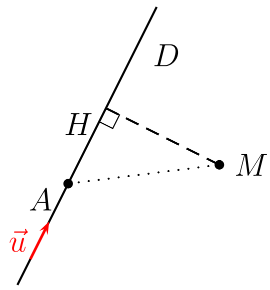
$$\mathscr{A}_{ABCD} = 2\mathscr{A}_{ABC} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|.$$

35.4.2 Distances

- d'un point à une droite de l'espace

Soit D une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. La distance d'un point M à la droite D est donnée par

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$



démonstration : *Si H désigne le projeté orthognal de M sur D, alors $d(M, D) = MH$. Or*

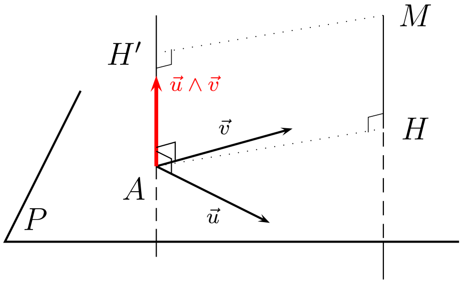
$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\| = \|(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \vec{u}\| = \|\overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}\| = MH\, \|\vec{u}\|,$$

d'où le résultat attendu, par division des deux membres par $\|\vec{u}\|$, non nul par hypothèse. ■

- d'un point à un plan de l'espace

Soit P un plan de l'espace euclidien orienté passant par un point A et dirigé par $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. La distance d'un point M au plan P est donnée par

$$d(M, P) = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$



démonstration : *On appelle H le projeté orthogonal de M sur le plan P, et H' sont projeté orthogonal sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{v}$. De manière simpliste, on a dans le triangle MAH' que*

$$\cos \widehat{A} = \frac{AH'}{MA} \quad \Leftrightarrow \quad AH' = MA \ \cos \widehat{A}.$$

Cela se traduit donc par :

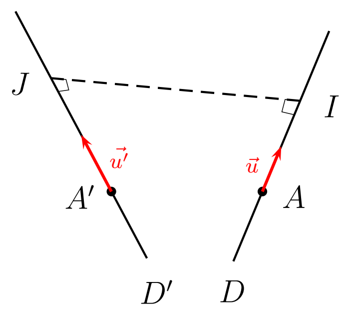
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MH} &= \overrightarrow{H'A} = \|\overrightarrow{MA}\| \cos(\overrightarrow{AM}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \ \frac{-\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA}\| \ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \ \cos(\overrightarrow{MA}, \vec{u} \wedge \vec{v})}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \ \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \\
&= \frac{\|\overrightarrow{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} \ \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.
\end{aligned}$$

D'où $MH = \|\overrightarrow{MH}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{MA} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$. ■

- entre deux droites non coplanaires

Soient D et D' deux droites non coplanaires de l'espace passant respectivement par A et A' et ayant respectivement pour vecteur directeur $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. Alors

$$\begin{aligned}
d(D, D') &= \min\{d(M, N) \mid M \in D, N \in D'\} \\
&= \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u'})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|}.
\end{aligned}$$



démonstration : *Commençons par dire que cette distance existe puisqu'un théorème (dont on ne donnera pas de démonstration ici) nous assure qu'il existe une unique droite à la fois sécante et perpendiculaire aux droites D et D' dans l'espace. On note resoectivement I et J les points d'intersection de cette droite avec D et D'.*

Soient $M \in D$ et $N \in D'$. Alors d'après le théorème de Pythagore (puisque $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JN}$),

$$MN^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JN}\|^2 = \|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{JN}\|^2 + \|\overrightarrow{IJ}\|^2.$$

Donc $M = I$ et $N = J$ réalisent le minumum de MN. De plus, si p désigne la projection orthogonale vectorielle sur la droite $\overrightarrow{\Delta} = (\overrightarrow{D} \oplus \overrightarrow{D'})^{\perp}$, alors on aura

$$\overrightarrow{IJ} = p(\overrightarrow{AA'}) = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u'})}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|} \ \frac{\vec{u} \wedge \vec{u'}}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|},$$

d'où le résultat. ■