

LEÇON N° 41 :

Rotations planes. Notions d'angle.

Pré-requis :

- Algèbre linéaire ;
- Notions de groupe, groupe linéaire ;
- Isométrie : définition par la conservation du produit scalaire.

On se place dans un plan vectoriel euclidien orienté \vec{E} . On note S l'ensemble des vecteurs de \vec{E} de norme 1.

41.1 Matrices orthogonales et orientation du plan

Définition 1 : Dans le groupe des matrices inversibles $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit le sous-ensemble suivant :

$$O^+(2) = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Proposition 1 : $(O^+(2), \times)$ est un groupe commutatif. De plus, chaque élément $M \in O^+(2)$ vérifie $M^{-1} = {}^tM$.

démonstration : Nous allons en fait montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$, groupe des matrices inversibles :

- ◇ On a bien $O^+(2) \subset GL_2(\mathbb{R})$ puisque toute matrice M de $O^+(2)$ a un déterminant non nul, impliquant que M est inversible.
- ◇ Lorsque $a = 1$ et $b = 0$, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant égal à 1. Par conséquent, $O^+(2) \neq \emptyset$.
- ◇ Soient $M, N \in O^+(2)$. Montrons que $MN \in O^+(2)$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$$

Dans ce cas,

$$MN = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad - bc & ac - bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha = ac - bd$ et $\beta = ad - bc$.

Calculons encore son déterminant :

$$\det(MN) = (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1.$$

Au final, on a bien $MN \in O^+(2)$.

◇ Soit $M \in O^+(2)$. Montrons que $M^{-1} \in O^+(2)$. On a :

$${}^tM = \begin{pmatrix} a & -(-b) \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ et } {}^tMM = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc ${}^tM = M^{-1}$ et $\det(M^{-1}) = a^2 + (-b)^2 = 1$, ce qui prouve que $M^{-1} \in O^+(2)$.

Pour la commutativité, en reprenant les matrices M et N utilisées ci-dessus, on a :

$$NM = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ ad + bc & -bd + ac \end{pmatrix} = MN.$$

Le résultat est ainsi démontré. ■

Définition 2 :

- (i) Une matrice de $O^+(2)$ est dite *matrice orthogonale*.
- (ii) Deux bases B et B' sont dites *de même sens* si la matrice de passage de B à B' , notée $P_{B \rightarrow B'}$, a un déterminant positif ;
- (iii) – Lorsqu'on se donne une base B de \vec{E} , on dit qu'on *oriente* \vec{E} ,
– On dit qu'une base B' est *directe* si elle est de même sens que B , et *indirecte* sinon.

Proposition 2 : Supposons \vec{E} orienté par une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$, et soit B' une base orthonormée directe. Alors

$$P_{B \rightarrow B'} \in O^+(2).$$

démonstration : On se donne $B' = (\vec{i}', \vec{j}')$ telle que B' soit une base orthonormée de même sens que B . Puisque B est une base de \vec{E} , il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$, de sorte que

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

On a $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$. En effet, B' orthonormée implique $\|\vec{i}'\| = \|\vec{j}'\| = 1$, et B orthonormée implique $\|\vec{i}'\| = a^2 + b^2$ et $\|\vec{j}'\| = c^2 + d^2$.

De plus, $\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0 \Leftrightarrow ac + bd = 0$, et comme $(a, b) \neq (0, 0)$, il existe donc $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $c = -\varepsilon b$ et $d = \varepsilon a$ (en effet, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u} = (a, b)$ est dirigé par le vecteur de coordonnées $(-b, a)$ dans B , car leur produit scalaire doit être égal à -1). Par conséquent,

$$c^2 + d^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 b^2 + \varepsilon^2 a^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2 = 1 \Leftrightarrow \varepsilon = \pm 1,$$

et puisque B' est de même sens que B , on a

$$\det(P_{B \rightarrow B'}) \geq 0 \Leftrightarrow ad - bc \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon a^2 + \varepsilon b^2 \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq 0,$$

d'où on déduit que $\varepsilon = 1$, et enfin que $P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in O^+(2)$. ■

41.2 Rotations vectorielles

Définition 3 : On appelle *rotation vectorielle* toute isométrie de \vec{E} de déterminant positif.

Théorème 1 : On suppose \vec{E} orienté par une base orthonormée $B = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f \in \mathcal{L}(\vec{E})$. On a alors équivalence entre :

- (i) f est une rotation ;
- (ii) $(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ est une base orthonormée de même sens que B ;
- (iii) La matrice de f dans B appartient à $O^+(2)$.

démonstration :

(i) \Rightarrow (ii) : Puisqu'une isométrie conserve les produits scalaires et les normes, l'image de la base B est donc une base orthonormée que l'on note B' . Par construction, $P_{B \rightarrow B'}$ est la même matrice que celle de f dans la base B , et son déterminant est donc positif (par définition des rotations), et B' est bien de même sens que B .

(ii) \Rightarrow (iii) : Dans ce cas, $P_{B \rightarrow B'} \in O^+(2)$ (d'après la proposition 2). Il suffit alors de remarquer qu'il s'agit également de la matrice de f dans la base B .

(iii) \Rightarrow (i) : Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la matrice de f dans B s'écrive $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Montrons d'abord que f est une isométrie. Pour cela, on se donne un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(\vec{u}) = (ax - by)\vec{i} + (bx + ay)\vec{j}$, d'où :

$$\|f(u)\|^2 = (ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = x^2 + y^2 = \|u\|^2.$$

f est donc bien une isométrie. De plus, $\det(M) = 1$, donc f est une isométrie de déterminant positif, c'est-à-dire une rotation. ■

Proposition 3 : L'ensemble des rotations est un sous-groupe commutatif de $GL(\vec{E})$.

démonstration : En se donnant une base orthonormée de E , on peut étudier cette question sur les matrices de ces rotations, qui sont dans $O^+(2)$. Le fait que $O^+(2)$ soit un groupe commutatif entraîne donc immédiatement que l'ensemble des rotations est un sous-groupe commutatif de $GL(E)$. ■

Théorème 2 : Soit $\vec{u}, \vec{v} \in S$. Il existe une unique rotation envoyant \vec{u} sur \vec{v} , notée $\rho_{\vec{u}, \vec{v}}$.

démonstration : Puisque $\vec{u} \in S$, il existe un vecteur $\vec{w} \in S$ tel que (\vec{u}, \vec{w}) soit une base orthonormée. On pose alors (a, b) les coordonnées de \vec{v} dans cette base. Dans ce cas, une éventuelle rotation envoyant \vec{u} sur \vec{v} aura forcément une matrice qui s'écrit dans la base B

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

En effet, la première colonne est imposée par l'image du vecteur \vec{u} , et la seconde colonne par le fait que $M \in O^+(2)$. On en déduit alors l'unicité d'une telle rotation. Réciproquement, la matrice définie ci-dessus est bien la matrice dans la base B d'une rotation car $a^2 + b^2 = \|\vec{v}\|^2 = 1$, et cette rotation envoie bien \vec{u} sur \vec{v} ($M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$), donc il y a bien existence de la rotation envoyant \vec{u} sur \vec{v} . ■

Proposition 4 : Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in S$,

$$\rho_{\vec{v}, \vec{w}} \circ \rho_{\vec{u}, \vec{v}} = \rho_{\vec{u}, \vec{w}}.$$

démonstration : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in S$. Alors

$$\rho_{\vec{v}, \vec{w}} \circ \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}) = \rho_{\vec{v}, \vec{w}}(\vec{v}) = \vec{w}.$$

La composée de deux rotations est une rotation (proposition 3), et l'unique rotation envoyant \vec{u} sur \vec{w} est $\rho_{\vec{u}, \vec{w}}$ (théorème précédent). ■

41.3 Angles orientés de vecteurs

41.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 4 : On définit sur S^2 une relation R par :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}), (\vec{x}, \vec{y}) \in S^2, \quad (\vec{u}, \vec{v}) R (\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow \rho_{\vec{u}, \vec{x}} = \rho_{\vec{v}, \vec{y}}.$$

Remarque 1 : Cette définition n'agit que sur des vecteurs unitaires, mais cette notion est vraiment facile à étendre lorsqu'on dispose de deux vecteurs non nuls et non unitaires !

Proposition 5 : Pour tous $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{x}, \vec{y}) \in S^2$, on a

$$(\vec{u}, \vec{v}) R (\vec{x}, \vec{y}) \Leftrightarrow \rho_{\vec{u}, \vec{v}} = \rho_{\vec{x}, \vec{y}}.$$

Remarque 2 : C'est une propriété caractéristique de la relation définie ci-dessus. On aurait ainsi pu la définir ainsi.

démonstration : Soient $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{x}, \vec{y}) \in S^2$. Alors

$$\begin{aligned} \rho_{\vec{u}, \vec{x}} = \rho_{\vec{v}, \vec{y}} &\Leftrightarrow \rho_{\vec{x}, \vec{v}} \circ \rho_{\vec{u}, \vec{x}} = \rho_{\vec{x}, \vec{v}} \circ \rho_{\vec{v}, \vec{y}} && \text{par composition par une application linéaire bijective} \\ &\Leftrightarrow \rho_{\vec{x}, \vec{v}} \circ \rho_{\vec{u}, \vec{x}} = \rho_{\vec{v}, \vec{y}} \circ \rho_{\vec{x}, \vec{v}} && \text{car les rotations commutent} \\ &\Leftrightarrow \rho_{\vec{u}, \vec{v}} = \rho_{\vec{x}, \vec{y}} && \text{par la proposition 4.} \end{aligned}$$

■

Théorème 3 : R est une relation d'équivalence.

démonstration : La proposition précédente revient à montrer que « = » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des rotations, ce qui est le cas par unicité de ces dernières. ■

Définition 5 : Les classes d'équivalence sur S^2 sont appelées les *angles orientés de vecteurs*. La classe associée au couple $(\vec{u}, \vec{v}) \in S^2$ est notée $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et l'ensemble des angles (classes d'équivalence) \hat{A} .

41.3.2 Somme des angles

Définition 6 : On définit la loi $+$ sur \hat{A} pour tous $(\vec{u}, \vec{v}), (\vec{x}, \vec{y}) \in S^2$ par :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \widehat{(\vec{z}, \vec{w})},$$

où $\vec{z} \in S$ est choisi quelconque, et $\vec{w} = \rho_{\vec{u}, \vec{v}} \circ \rho_{\vec{x}, \vec{y}}(\vec{z})$.

Théorème 4 (relation de Chasles) : Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in S$,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}.$$

démonstration : D'après la définition précédente, en choisissant $\vec{z} = \vec{u}$, on a :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{\alpha})},$$

où $\alpha = \rho_{\vec{v}, \vec{w}} \circ \rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}) = \rho_{\vec{v}, \vec{w}}(\vec{u}) = \vec{w}$. D'où le résultat. ■

Proposition 6 : $(\hat{A}, +)$ est un groupe commutatif.

démonstration : En utilisant la définition de $+$, on se ramène au groupe commutatif des rotations :

- ◇ L'associativité de $+$ vient directement de celle de la composition des rotations.
- ◇ La commutativité de $+$ vient de celle des rotations.
- ◇ A l'aide de la définition 4, il est évident que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in S$,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v})}.$$

Soit alors ϵ cet angle. Dans ce cas, pour tous $\vec{x}, \vec{y} \in S$,

$$\epsilon + \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \widehat{(\vec{x}, \vec{x})} + \widehat{(\vec{x}, \vec{y})} \stackrel{\text{thm 4}}{=} \widehat{(\vec{x}, \vec{y})},$$

donc $\epsilon \in \hat{A}$ est bien l'élément neutre de $+$.

- ◇ Enfin, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in S$,

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} \stackrel{\text{thm 4}}{=} \widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = \epsilon,$$

donc tout élément $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ de \hat{A} possède un symétrique $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$ dans \hat{A} .

Définition 7 : Dans le groupe $(\hat{A}, +)$, on appelle

- ◇ *angle nul* l'élément neutre ϵ défini dans la démonstration ci-dessus, noté désormais 0 ;
- ◇ *angle plat* l'élément $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})}$ pour $\vec{u} \in S$, noté Π ;
- ◇ *angle droit* tout angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, avec $\vec{u}, \vec{v} \in S$ orthogonaux.

Proposition 7 :

- (i) L'angle plat ne dépend pas du choix de \vec{u} ;
- (ii) $\Pi + \Pi = 0$;
- (iii) Il existe deux angles droits distincts.

démonstration : Soient $\vec{u}, \vec{v} \in S$.

(i) Il faut montrer que

$$\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \widehat{(\vec{v}, -\vec{v})} \Leftrightarrow (\vec{u}, -\vec{u}) R (\vec{v}, -\vec{v}) \Leftrightarrow \rho_{\vec{u}, -\vec{u}} = \rho_{\vec{v}, -\vec{v}} \stackrel{\text{prop 5}}{\Leftrightarrow} \rho_{\vec{u}, \vec{v}} = \rho_{-\vec{u}, -\vec{v}}.$$

Or, par linéarité de $\rho_{\vec{u}, \vec{v}}$,

$$\rho_{\vec{u}, \vec{v}}(-\vec{u}) = -\rho_{\vec{u}, \vec{v}}(\vec{u}) = -\vec{v},$$

ce qui implique que $\rho_{\vec{u}, \vec{v}} = \rho_{-\vec{u}, -\vec{v}}$, et le résultat est démontré.

(ii) D'après (i), on a que

$$\Pi + \Pi = \widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} + \widehat{(-\vec{u}, -(-\vec{u}))} \stackrel{\text{thm 4}}{=} \widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = 0.$$

(iii) Soit $B_1 = (\vec{u}, \vec{v}) \in S^2$ une base formée de deux vecteurs orthogonaux de S . Posons alors $\beta_1 = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ et $\beta_2 = \widehat{(\vec{u}, -\vec{v})}$ (ce sont donc deux angles droits), de sorte que

$$\beta_1 - \beta_2 = \beta_1 + (-\beta_2) = -\beta_2 + \beta_1 = \widehat{(-\vec{v}, \vec{u})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(-\vec{v}, \vec{v})} = \Delta \neq 0.$$

On en déduit qu'il existe au moins deux angles droits distincts (si c'étaient les mêmes, on aurait eu une différence égale à 0).

D'autre part, si $B' = (\vec{x}, \vec{y}) \in S^2$ est une autre base formée de vecteurs orthogonaux de S , alors B' est soit de même sens que B_1 , soit de même sens que $B_2 = (\vec{u}, -\vec{v})$. Par le théorème 1, il existe alors une rotation qui envoie B_1 sur B' ou alors B_2 sur B' , d'où $\widehat{(\vec{x}, \vec{y})}$ est égal soit à β_1 , soit à β_2 . On a donc au plus deux angles droits distincts. ■

Proposition 8 : Soit E le plan affine associé à \vec{E} , et A, B, C trois points distincts de E . Alors

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = \Pi.$$

Remarque : Les angles ont été étendus ici à des vecteurs non nuls et non unitaires. Afin de démontrer ce résultat, il faudra évidemment considérer le vecteur unitaire colinéaire et de même sens.

démonstration : On pose

$$\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|},$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} &= \widehat{(\vec{u}, -\vec{w})} + \widehat{(\vec{w}, -\vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, -\vec{u})} \\ &= \left(\widehat{(\vec{u}, \vec{w})} + \widehat{(\vec{w}, -\vec{w})} \right) + \left(\widehat{(\vec{w}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, -\vec{v})} \right) + \widehat{(\vec{v}, -\vec{u})} \\ &= \widehat{(\vec{u}, \vec{w})} + \Pi + \widehat{(\vec{w}, \vec{v})} + \Pi + \widehat{(\vec{v}, -\vec{u})} \\ &= \widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} + \Pi + \Pi = \Pi + 0 = \Pi. \end{aligned}$$

■