

LEÇON N° 47 :

Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.

Pré-requis :

- Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: limites, continuité, dérivabilité, ... ;
- Norme d'un vecteur : notions élémentaires.

On se place dans le plan affine euclidien orienté \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

47.1 Courbes planes définies par des équations paramétriques

Définition 1 : Étant données deux fonctions f, g définies et continues sur un intervalle $I \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$, on appelle *courbe paramétrée plane* l'ensemble Γ des points $M(t)$ déterminés pour $t \in I$ par

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}.$$

Le système

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

est appelé système d'équations paramétriques de Γ .

Interprétation cinématique :

Lorsque t désigne le temps, $M(t)$ est la position du point mobile M à l'instant t , et Γ la trajectoire de M .

47.2 Étude locale d'une courbe paramétrée

47.2.1 Vecteur dérivé et tangente

Soit $t_0 \in I$ fixé arbitrairement. Supposons que f et g soient de classe \mathcal{C}^2 sur I , de sorte que la formule de Taylor à l'ordre 2 appliquée à f et g en posant

$$\frac{d^n \overrightarrow{OM}}{dt^n}(t_0) = f^{(n)}(t_0)\vec{i} + g^{(n)}(t_0)\vec{j}$$

pour $n = 1$ et 2 donne pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(t_0)M(t)} &= (t - t_0) \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2} \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) + (t - t_0)^2 \underbrace{\vec{\varepsilon}(t)}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} \vec{0}} \quad (E) \\ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} &= \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) + \frac{t - t_0}{2} \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) + (t - t_0)\vec{\varepsilon}(t) \\ \Rightarrow \left\| \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} - \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \right\| &\leq |t - t_0| \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) \right\| + \|\vec{\varepsilon}(t)\| \right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0. \end{aligned}$$

Définition 2 : Soient $t_0 \in I$ et $\vec{v}(t) := \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0}$. On appelle *vecteur dérivé* à la courbe Γ en $M(t_0)$ le vecteur défini par

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{v}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0} = \frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j}.$$

On le note $\vec{v}(t_0)$ par commodité.

Remarque 1 : Lorsque $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, la droite sécante $(M(t_0)M(t))$ (définie par $M(t_0)$ et le vecteur directeur $\vec{v}(t)$) a pour limite quand $t \rightarrow t_0$ la droite définie par $M(t_0)$ et le vecteur directeur $\vec{v}(t_0)$. Ainsi, cela justifie les définitions suivantes.

47.2.2 Point régulier

Définition 3 : Soient Γ une courbe de classe \mathcal{C}^1 sur I (i.e. $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$) et $t_0 \in I$. Le point $M(t_0) \in \Gamma$ est dit *régulier* si

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}.$$

Interprétation cinématique :

Le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0)$ représente le vecteur vitesse instantanée à l'instant t_0 . Un point régulier est donc un point à vitesse non nulle, et la tangente à la trajectoire d'un point mobile en un point régulier est dirigée par le vecteur vitesse. De même, le vecteur $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0)$ représente le vecteur accélération instantanée à l'instant t_0 .

47.3 Étude au voisinage d'un point régulier $M(t_0)$

Dans la suite, Γ désigne une courbe de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 2$).

47.3.1 Point birégulier

Définition 4 : Un point $M(t_0) \in \Gamma$ est dit *birégulier* si $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}(t_0), \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0) \right)$ est un système libre.

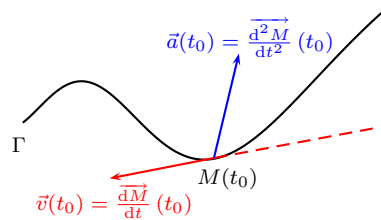
Posons $\vec{a}(t_0) = \frac{d^2\vec{M}}{dt^2}(t_0)$. Si $(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$ est un système libre, alors on peut écrire

$$\vec{\varepsilon}(t) = \alpha(t)\vec{v}(t_0) + \beta(t)\vec{a}(t_0), \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \beta(t) = 0,$$

donc

$$(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)(1 + \alpha(t))\vec{v}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2(1 + 2\beta(t))\vec{a}(t_0).$$

Dans le repère $(M(t_0), \vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$, $M(t)$ a pour coordonnées $X(t) = (t - t_0)(1 + \alpha(t))$, du signe de $t - t_0$ pour t proche de t_0 (en effet, $\alpha(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow t_0$), et $Y(t) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2(1 + 2\beta(t)) \geq 0$ pour t proche de t_0 . D'où l'allure de la courbe Γ au voisinage d'un point birégulier $M(t_0)$:



47.3.2 Point d'inflexion analytique

Définition 5 : Un point $M(t_0) \in \Gamma$ est appelé *point d'inflexion analytique* si $\vec{v}(t_0) \neq \vec{0}$ et $(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$ est un système lié.

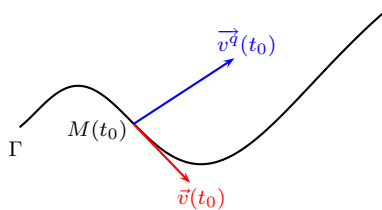
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\vec{v}^n(t_0) = \frac{d^n M}{dt^n}(t_0)$ et, $M(t_0)$ étant un point d'inflexion analytique, on note encore q le plus petit entier tel que $(\vec{v}(t_0), \vec{v}^q(t_0))$ soit libre. Si $q > 2$, pour tout $k \in \{2, \dots, q-1\}$, $\vec{v}^k(t_0)$ et $\vec{v}(t_0)$ colinéaires et donc

$$\vec{v}(t_0) \neq \vec{0} \Rightarrow \forall k, \exists \lambda_k \in \mathbb{R} \mid \vec{v}^k(t_0) = \lambda_k \vec{v}(t_0).$$

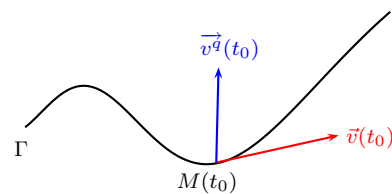
Comme précédemment, on montre que

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = (t - t_0)\vec{v}(t_0) \left(1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{q-1} \frac{\lambda_k (t - t_0)^k}{k!}}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0} + \alpha(t) \right) + \frac{(t - t_0)^q}{q!} \vec{v}^q(t_0) \cdot \underbrace{(1 + q! \beta(t))}_{\xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0}.$$

D'où l'allure de la courbe selon la parité de q :



q impair



q pair

Remarque 2 : Lorsque q est impair, la courbe "traverse" sa tangente, c'est une inflexion géométrique.

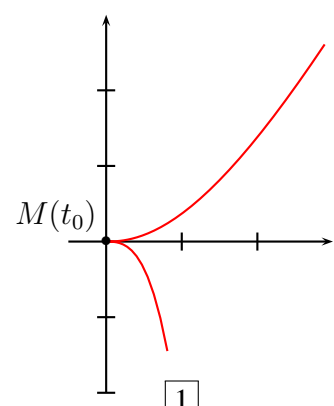
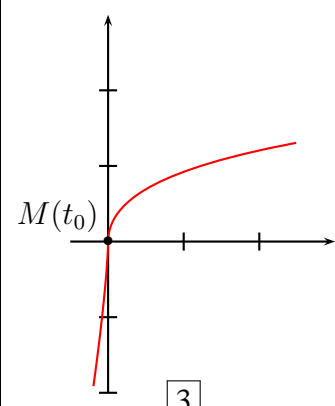
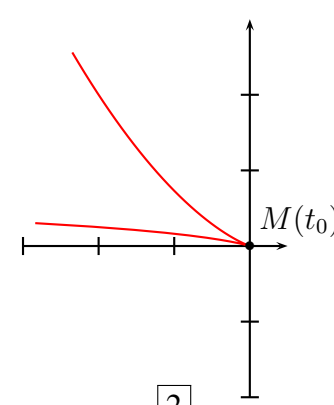
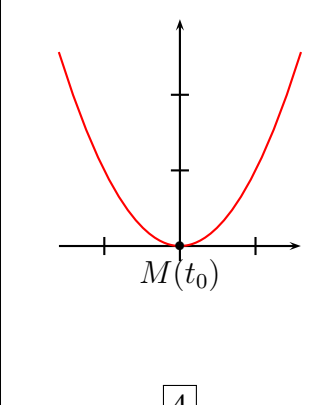
47.3.3 Point stationnaire

Définition 6 : Un point $M(t_0) \in \Gamma$ est dit *stationnaire* si $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$.

On associe au point $M(t_0)$ deux entiers p et q tels que p soit le plus petit entier vérifiant $\vec{v}^p(t_0) \neq \vec{0}$ et q le plus petit entier tel que $(\vec{v}^p(t_0), \vec{v}^q(t_0))$ soit libre dans le plan vectoriel. Comme d'habitude, on montre que dans le repère $(M(t_0), \vec{v}^p(t_0), \vec{v}^q(t_0))$, on a $M(t) = (X(t), Y(t))$, où

$$\text{signe}(X(t)) = \frac{(t - t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad \text{signe}(Y(t)) = \frac{(t - t_0)^q}{q!}$$

lorsque t est proche de t_0 . D'où les quatre cas possibles :

	p pair	p impair
q impair	 1	 3
q pair	 2	 4

1. Rebroussement de première espèce $\left[x(t) = t^2, y(t) = \frac{t^3}{e^t} \text{ pour } t \in [-3; 3] \right]$;
2. Rebroussement de deuxième espèce $\left[x(t) = 2t - \frac{1}{t^2} + 3, y(t) = 2t + t^2 + 1 \text{ pour } t \in [-2, 6; -0, 45] \right]$;
3. Inflexion $\left[x(t) = t^5, \frac{5}{2} \frac{t^3}{e^t} \text{ pour } t \in [-0, 72; 1, 2] \right]$;

4. Méplat

$$[x(t) = t^3, y(t) = t^6 \text{ pour } t \in [-1, 17 ; 1, 17]] .$$

Interprétation cinématique des cas 1 et 2 :

« Pour rebrousser chemin, il faut d'abord s'arrêter. » Nécessairement, $M(t_0)$ est un point stationnaire.

Remarque 3 : Les équations des courbes ci-dessus ont été explicitées afin de pouvoir vérifier qu'il s'agit bien à chaque fois d'un point stationnaire : il suffit de calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et vérifier si elles s'annulent bien en zéro.

47.4 Étude des branches infinies

Soit $I = [a, b[$.

Définition 7 : On dit que Γ (défini sur I) présente une *branche infinie* lorsque $t \rightarrow b$ si

$$\lim_{t \rightarrow b} OM(t) = +\infty,$$

O étant un point arbitrairement fixé dans \mathcal{P} .

Remarque 4 : Cette définition ne dépend pas du choix du point O . En effet, si O' désigne un autre point de \mathcal{P} , alors l'inégalité triangulaire nous assure que

$$O'M(t) - OO' \leq OM(t) \leq O'M(t) + OO' \Rightarrow \left(\lim_{t \rightarrow b} OM(t) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow b} O'M(t) = +\infty \right).$$

Soient $\lambda, p \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}^*$. Lorsque $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, on a plusieurs cas à distinguer :

- ◇ $f(t) \rightarrow \pm\infty$ et $g(t) \rightarrow \lambda$:
 Γ admet $y = \lambda$ pour asymptote horizontale ;
- ◇ $g(t) \rightarrow \pm\infty$ et $f(t) \rightarrow \lambda$:
 Γ admet $x = \lambda$ pour asymptote verticale ;
- ◇ $g(t)/f(t) \rightarrow +\infty$ (resp. 0) :
 Γ admet une branche parabolique parallèlement à (Oy) (resp. (Ox)) ;
- ◇ $g(t)/f(t) \rightarrow m$:
 Γ admet $y = mx$ pour direction asymptotique ;
- ◇ $g(t)/f(t) \rightarrow m$ et, de plus, $g(t) - mf(t) \rightarrow p$:
 Γ admet $y = mx + p$ pour asymptote oblique ;
- ◇ **Autres cas :**
 On ne peut rien dire...

47.5 Exemple : épicycloïde à trois rebroussements

On considère le cercle fixe \mathcal{C}_f de centre $(0, 3)$, ainsi que le cercle mobile \mathcal{C}_m de rayon 1 roulant sur \mathcal{C}_f sans glisser. On repère un point M sur \mathcal{C}_m et on étudie sa trajectoire en fonction du temps $t \in \mathbb{R}$. Le reste des notations, notamment d'angles, se trouve sur la figure ci-dessous :

Notons

$$\vec{u}_t = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}.$$

Donc $\vec{OM}(t) = \vec{OO'} + \vec{O'M}(t) = 4\vec{u}_t + \vec{u}_\varphi$. Or les deux arcs $\widehat{M(0)I}$ et $\widehat{IM(t)}$ ont la même longueur car \mathcal{C}_m roule sans glisser sur \mathcal{C}_f , donc $3t = \alpha$ (angles en radians !!). D'où

$$\begin{aligned} \varphi &= (\vec{i}, \vec{O'M}(t)) \\ &= (\vec{i}, \vec{OO'}) + (\vec{OO'}, \vec{O'O}) + (\vec{O'O}, \vec{O'M}(t)) \\ &= t + \pi + \alpha = 4t + \pi. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= 4\vec{u}_t + \vec{u}_{4t+\pi} \\ &= \underbrace{(4\cos t - \cos 4t)}_{f(t)}\vec{i} + \underbrace{(4\sin t - \sin 4t)}_{g(t)}\vec{j}. \end{aligned}$$

Remarques 5 :

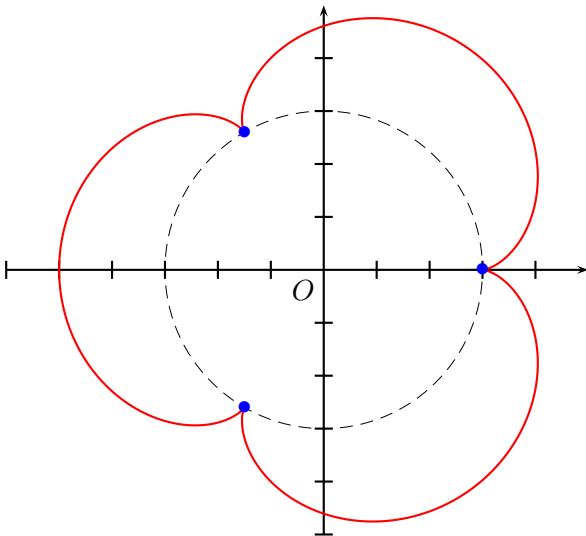
- ◇ $\vec{OM}(t + 2\pi) = \vec{OM}(t) \Rightarrow$ réduction de l'intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$.
- ◇ $f(2\pi - t) = f(t)$ et $g(2\pi - t) = -g(t) \Rightarrow \Gamma$ est symétrique par rapport à $(Ox) \Rightarrow$ réduction de l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

Le calcul de f' et g' donne alors les tableaux de variations suivants :

t	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(t)$	+	0	-	0	-
$f(t)$	↗		↘		↘

t	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$	π
$g'(t)$	+	0	-	0	-
$g(t)$	↗		↘		↘

On arrive ainsi à la représentation graphique :



On a

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = 8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \vec{u}_{\frac{5t}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{0} &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3t}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne trois points stationnaires (points bleus sur le graphique) qui sont des rebroussements de première espèce étant donnée l'interprétation physique.

