LEÇON N° 51 :

Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parable, une ellipse, une hyperbole.

Pré-requis :
- *Coniques : définitions monofocale et par équation réduite, généralisation bifocale des coniques à centre ;*
- *Leçon n° 47 : courbes paramétrées planes (représentation paramétrique, vecteur dérivé, équation de la tangente [1]).*

On se place dans un plan affine euclidien orienté P, muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit Γ une conique quelconque.

51.1 Paramétrisation de Γ, tangente en un point

Conique Γ	Parabole $\mathscr{P}$	Ellipse $\mathscr{E}$	Hyperbole $\mathscr{H}$
Rappel : Si $\mathscr{D}(O, \vec{\imath})$ est l'axe focal, une équation de Γ est :	$y^2 = 2px$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Téorème 1 : Γ est définie par les équations paramétriques	$x = \dfrac{t^2}{2p}$ $y = t$ $t \in \mathbb{R}$	$x = a\cos t$ $y = b\sin t$ $t \in [0, 2\pi[$	$x = \pm a/\cos t$ $y = b\tan t$ $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
Corollaire : Γ admet en tout point une tangente. Si $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ T_{M_0} a pour équation	$yy_0 = p(x - x_0)$	$\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	$\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

démonstration (théorème 1) *:*

$\underline{\mathscr{P}}$ **:** $M(x, y) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow y^2 = 2px$. *On pose simplement* $y = t, t \in \mathbb{R}$.

[1] : Si $\Gamma = \{M(t) \mid x = f(t), y = g(t), t \in \mathbb{R}\}$ est la courbe en question, alors l'équation de la tangente est donnée par

$$\begin{vmatrix} x - f(t) & f'(t) \\ y - g(t) & g'(t) \end{vmatrix} = 0.$$

$\underline{\mathscr{E}}$ **:** *Par définition des fonctions cosinus et sinus, on a que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. *Ainsi, pour tout* $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ *vérifiant* $u^2 + v^2 = 1$, *on peut faire correspondre, modulo* 2π, *un réel* t *tel que* $u = \cos t$ *et* $v = \sin t$. *Par suite, pour tout* $M(x, y) \in \mathrm{P}$, *on a*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \exists\, t \in [0, 2\pi[\mid \frac{x}{a} = \cos t \;\; et \;\; \frac{y}{b} = \sin t.$$

$\underline{\mathscr{H}}$ **:** *La fonction* $t \longmapsto \tan t$ *est une bijection de* $] - \pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$. *De plus, la fonction* $t \longmapsto 1/\cos t$ *(paire) est une bijection de* $5[0, \pi/2] \longrightarrow [1, +\infty[$. *Pour tout* $t \in] - \pi/2, \pi/2[$, *on a* $1/\cos^2 t - \tan^2 t = 1$. *D'où le résultat :*

$$\forall M(x, y) \in \mathscr{H}, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \exists\, t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mid \frac{x}{a} = \pm\frac{1}{\cos t} \;\; et \;\; \frac{y}{b} = \tan t.$$

Pour chacune des trois coniques, la réciproque est évidente : il suffit en effet d'effectuer le calcul. ■

démonstration (Corollaire) *: Dans les trois cas, l'existence de la tangente est assurée par la dérivabilité de* $t \longmapsto \overrightarrow{OM}(t)$ *et*

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \neq 0 \quad (\forall t)$$

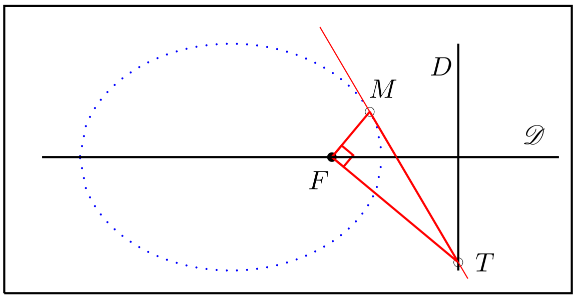
(utiliser les équations paramétriques pour s'en convaincre). La tangente est dirigée par ce vecteur "vitesse" $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$. ■

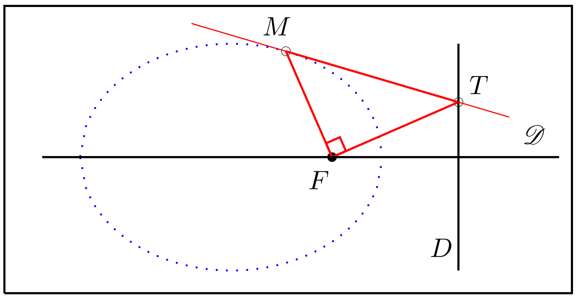
51.2 Construction de la tangente (normale) en un point

51.2.1 D'après la définition monofocale (F, D, e)

Théorème 2 : On suppose donnés un foyer F, une directrice D et une excentricité e de Γ. Si $M \in \Gamma \backslash \mathscr{D}$, la tangente à Γ en M coupe D en T tel que le triangle MFT soit rectangle en F.

Faisons deux figures pour illustrer ce théorème :





démonstration *: Traitons analytiquement le cas de l'ellipse. Pour des raisons de symétrie, on peut considérer que* $F(c, 0)$ *et* $D : x = \frac{a^2}{c}$ *avec* $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. *En un points* $M(t)$ *dce coordonnées* $(a\cos t, b\sin t)$ *(où* $\sin t \neq 0$ *car* $M \notin \mathscr{D}$*), la tangente a pour équation*

$$\begin{vmatrix} x - a\cos t & -a\sin t \\ y - b\sin t & b\cos t \end{vmatrix} = bx\cos t + ay\sin t - ab = 0.$$

$T \in \mathscr{D}$ a donc pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{b - \frac{ab}{c}\cos t}{\sin t}\right)$, d'où les composantes des vecteurs $\overrightarrow{TF}$ et $\overrightarrow{MF}$, et il suffit encore de vérifier que $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{TF} = 0$. (variante : d'où les distances MT, MF et FT, et l'on vérifie que $TF^2 + FM^2 = TM^2$ et le théorème de Pythagore assure le résultat.) ■

`Remarque 1` : La variante permet de ne pas avoir à placer le produit scalaire en pré-requis.

Corollaire : Soit $T \in \mathscr{D}$. La perpendiculaire à Δ à (FT) passant par F coupe Γ en M et la tagente à Γ en M passe par T.

démonstration *: Soit M un point d'intersection de (FT) avec Γ. Par le théorème précédent, le tangente T_M à Γ en M coupe D en T' tel que $(FM) \perp (FT')$. Or par hypothèse, $big((FM) = \Delta\big) \perp (FT)$, donc comme $T, T' \in \mathbb{D}$, $T = T'$ et la tangente T_M passe par T.* ■

Le théorème donne une construction de la tangente en un point M de Γ : la perpendiculaire à (FM) passant par F coupe D en T : $T_M = (MT)$ (voir illustration ci-dessus).

51.2.2 D'après la génération bifocale : ellipse et hyperbole ($|MF \pm MF'| = 2a$)

Théorème 3 :

(i) La tangente (resp. normale) au point M d'une ellipse est la bissectrice extérieure (resp. intérieure) de l'angle $\widehat{FMF'}$.

(ii) La tangente (resp. normale) au point M d'une hyperbole est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle $\widehat{FMF'}$.

démonstration *: Notons $\overrightarrow{m}(t) = \overrightarrow{M(t)F}$ et $\overrightarrow{m'}(t) = \overrightarrow{M(t)F'}$.*

(i) L'application $h : t \longmapsto \|\overrightarrow{m}(t)\| + \|\overrightarrow{m'}(t)\|$ ($= MF + MF'$) est constante sur $[0, 2\pi]$ d'après la définition bifocale de l'ellipse. Le théorème 1 assure que les applications $t \longmapsto \|\overrightarrow{m}(t)\|$ et $t \longmapsto \|\overrightarrow{m'}(t)\|$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. On peut donc calculer h' ($\equiv 0$) :

$$\|\overrightarrow{m}(t)\| = \sqrt{\overrightarrow{m}(t) \cdot \overrightarrow{m}(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\|\overrightarrow{u}(t)\| = \frac{\frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t) \cdot \overrightarrow{u}(t)}{\|\overrightarrow{u}(t)\|},$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OM(t)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{u}(t) = -\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t).$$

Le même calcul avec $\overrightarrow{v}(t)$ donne l'équivalence

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{MF}\|} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF'}\|}\right) = 0.$$

La tangente en M étant dirigée par $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ et $\overrightarrow{MF}/MF + \overrightarrow{MF'}/MF'$ étant un vecteur directeur de la bissectrice intérsieure de $\widehat{FMF'}$, on en déduit de $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)\right) \perp \left(\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}\right)$ que la tangente est la bissectrice extérieure et la normale est la bissectrice intérieure.

(ii) Un raisonnement analogue donne

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)\cdot\left(\frac{\overrightarrow{MF}}{MF}-\frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}\right)=0,$$

et l'on conclut de la même manière. ■

51.2.3 Cas de la parabole (F, D)

Théorème 4 : La tangente (resp. normale) au point M d'une parabole est la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle $\widehat{FHM}$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur D. Si M est le sommet de la parabole, alors la tangente est parallèle à D.

démonstration *: $MF = MH$ par définition géométrique. Notons Δ la bissectrice intérieure de $\widehat{FHM}$, de sorte que $TF = TH$, où T est l'intersection entre Δ et D (T existe si M n'est pas le sommet de la parabole), et TM est un côté commun aux triangles TFM et THM, qui sont donc isométriques. Comme $\widehat{THM}$ est droit, $\widehat{TFM}$ l'est aussi, et d'après le théorème 2, $\Delta = (TM) = T_M$ est la tangente issue de M. Supposons alors que M est le sommet de la parabole. Dans ce cas, $t = 0$, et*

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0)=\vec{\jmath},$$

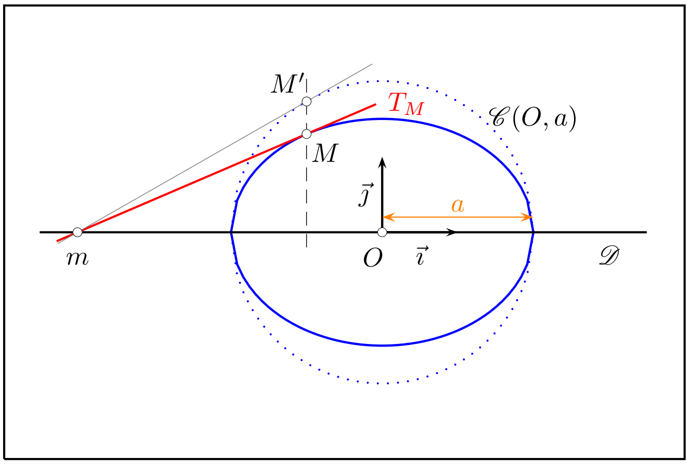
donc la tangente est parallèle à D. ■

51.3 Constructions particulières des tangentes

51.3.1 Ellipse

L'affinité conserve les contacts et les points de l'axe sont invariants.

Construction : Si $M \in \mathscr{E}$, on trace la tangente à $\mathscr{C}(O, a)$ au point M' de même abscisse que M : perpendiculaire à (OM) passant par M'. Elle coupe $\mathscr{D}$ en m, et alors la tangente recherchée n'est autre que la droite (Mm).

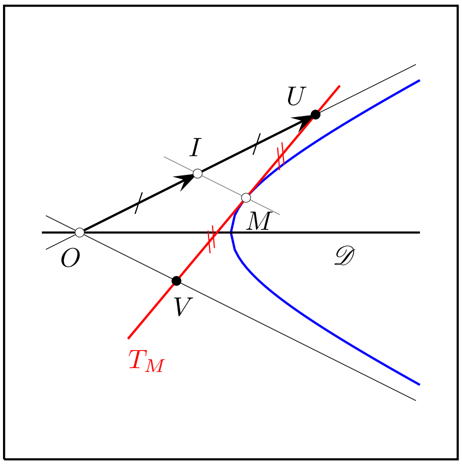


51.3.2 Hyperbole

Théorème 5 : Soit $M \in \mathscr{H}$. La tangente = $\mathscr{H}$ en M coupe les deux asymptotes en deux points U et V symétriques par rapport à M.

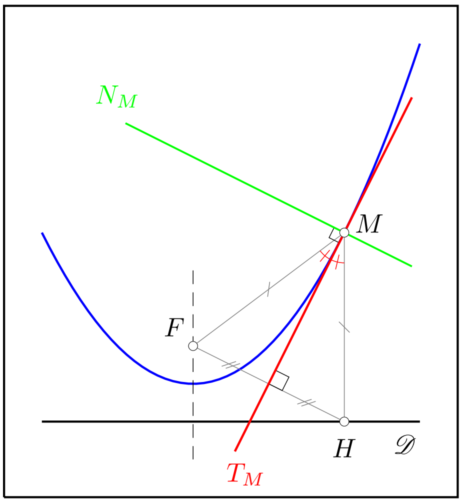
démonstration *: Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{VM}$ et $\overrightarrow{MU}$ en utilisant les équations cartésiennes des deux asymptotes et de T_M. On trouve alors $\overrightarrow{VM} = \overrightarrow{MU}$.* ■

Construction : Soit $M \in \mathscr{H}$. La parallèle à une asymptote passant par M coupe l'autre en I. On définit alors U tel que $\overrightarrow{IU} = \overrightarrow{OI}$. Dans ce cas, le théorème de Thalès nous affirme que $\overrightarrow{VM} = \overrightarrow{MU}$, et par conséquent, $T_M = (UM)$.



51.3.3 Parabole

Puisque $MF = MH$ (H est le projeté orthogonal de $M \in \mathscr{P}$ sur D), le triangle MFH est isocèle en H, donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MFH}$ est aussi la médiatrice de $[FH]$. La construction de la tangente s'en déduit directement. Une figure illustrant ce cas se trouve au paragraphe 4.



Exercice : Soit Γ une parabole de foyer F et d'axe focal $\mathscr{D}$. Soit K l'intersection de $\mathscr{D}$ et de la directrice D de Γ. Le cercle de centre F passant par un point M de Γ coupe $\mathscr{D}$ en deux points : $T \in [FK)$ et N. Montrer que (TM) est la tangente à Γ en M et que (NM) en est la normale.