LEÇON N° 52 :

Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :
- *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;*
- *Inégalité triangulaire ;*
- *Suites : définition, convergence (+ utilisant une fonction continue).*

52.1 Suites monotones

Définition 1 : Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que (u_n) est *croissante* (resp. *décroissante*) si

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{(resp. } u_{n+1} \leqslant u_n\text{)}.$$

De plus, (u_n) est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante. Enfin, l'adverbe *strictement* s'applique si ce sont les inégalités strictes qui sont vérifiées.

Remarques 1 :
- On peut définir la monotonie à partir d'un certain rang, ce qui peut s'avérer très pratique par exemple dans l'étude des limites ;
- Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut :
  1. étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n,
  2. comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (pour tout n), à condition que la suite (u_n) ne comporte pas de termes nuls,
  3. étudier les variations de la fonction f s'il existe f telle que $f(n) = u_n$.

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 3n + 2$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 3x + 2$ vérifie bien la relation $\forall\, n \in \mathbb{N}, f(n) = u_n$. Cette fonction étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) l'est aussi.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = n^2$.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1} > u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} & \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 > 1 \\ \Leftrightarrow\ & u_{n+1} > u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

– Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2$. Cette fonction est strictement croissante sur cet intervalle, et $f(n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

Théorème 1 : Toute suite de nombres réels croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.

démonstration : *Soit (u_n) une suite de nombres réels croissante et majorée par $\ell = \sup(u_n)$. On va montrer que (u_n) converge vers ℓ. On a :*

$$\forall\, n, p \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow u_n \geqslant u_p \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant \ell.$$

Puisque $\ell = \sup(u_n)$, alors $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (u_n), pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \mid \ell - \varepsilon \leqslant u_N.$$

La propriété de croissance donne alors $n \geqslant N \Rightarrow u_n \geqslant u_N$. Donc

$$\begin{aligned} & \forall\, n \geqslant N, \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon \\ \Rightarrow\ & \forall\, n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

On retrouve la définition de la convergence de (u_n) vers ℓ, à savoir

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geqslant N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

■

52.2 Suites adjacentes

Définition 2 : Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence converge vers 0.

Lemme 1 : Supposons que (u_n) soit une suite croissante adjacente à (v_n), une suite décroissante. Alors

$$\forall\, n, \quad u_n \leqslant v_n.$$

démonstration : *Par hypothèse, on a pour tout n que $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \geqslant v_{n+1}$. Alors, toujours pour tout n,*

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leqslant (v_n - u_n) - (v_n - u_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n,$$

donc la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et tend vers 0, donc elle est à termes positifs (conséquence de la démonstration précédente), ce qui signifie que pour tout n, $v_n \geqslant u_n$. ■

Théorème 2 : Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

démonstration : *Supposons, quitte à échanger les rôles de (u_n) et (v_n), que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. Puisque ces suites sont adjacentes, (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) par u_0, ce qui rend ces deux suites convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites respectives, que l'on suppose différentes, de sorte que*

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon\,; \\ &\forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, N' \in \mathbb{N} \mid \quad n \geqslant N' \Rightarrow |v_n - \ell'| < \varepsilon'. \end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|u_n - v_n) - (\ell - \ell') \leqslant |u_n - \ell| - |v_n - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon'$. En posant alors $M = \max(N, N')$ et $\epsilon = \varepsilon + \varepsilon'$, on a la convergence de $(u_n - v_n)$ vers $\ell - \ell'$. Or

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0 = \ell - \ell' \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \ell'.$$

■

`Remarque 2` : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes qui convergent vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors u_n et v_n sont des valeurs approchées de ℓ respectivement par défaut et par excès (en supposant (u_n) croissante et (v_n) décroissante), avec une erreur inférieure à $\varepsilon_n = v_n - u_n$.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes, déterminer leur limite commune et donner un encadrement de cette limite à 10^{-3} près.

<u>**Solution**</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \\ \text{et} \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)\cdot(n+1)!} \\ &= \frac{n(n+1) - (n+1)^2 + n}{n(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{n^2 + 2n - (n+1)^2}{n(n+1)\cdot(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après ces trois calculs, les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.

Pour la limite, nous allons "tricher" un peu en supposant connu le développement en série entière de la fonction exponentielle :

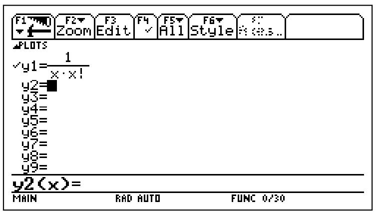
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

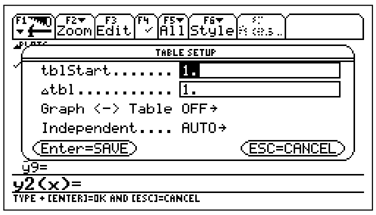
Il vient directement que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = e.$

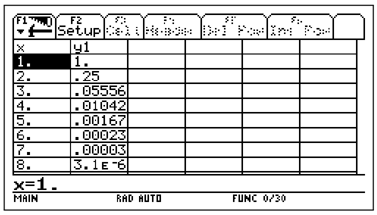
Enfin, puisqu'un encadrement de e est donné par $v_n - u_n$, il suffit de déterminer n tel que $v_n - u_n \leqslant 10^{-3}$. Or

$$v_n - u_n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow \frac{1}{n \cdot n!} \leqslant 10^{-3}.$$

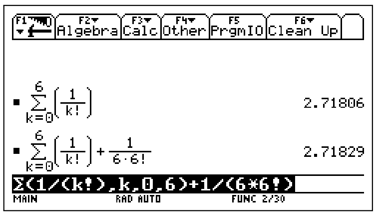
Déterminons cette quantité pour les première valeurs de n (en effet, vu la croissance fulgurante de la fonction factorielle, nous n'aurons certainement pas besoin de calculer cette quantité pour plus de 5 valeurs de n). Nous commençons par rentrer la fonction $f(x) = \frac{1}{x \cdot x!}$ dans y_1 (écran "Y="), puis nous allons dans "TBLSET" (touche Diamond + T) afin de définir la première valeur et le pas à 1. Enfin, nous allons dans "TABLE" (touche Diamond + Y) afin de voir les résultats :







Il y a évidemment d'autres possibilités pour déterminer cette valeur (en utilisant le tableur par exemple), mais celle-ci est certainement la plus rapide. On constate alors que $n \geqslant 6$ remplit la condition. Enfin, on calcule u_6 et v_6 :



Finalement,

$$2,71806 \leqslant e \leqslant 2,71829.$$

Nous venons de déterminer une valeur approchée d'un nombre réel non rationnel grâce à une suite de nombres rationnels. $\diamondsuit$

52.3 Applications

52.3.1 Méthode de dichotomie

Proposition 1 : Sot f définie et continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alors f admet au moins une racine dans l'intervalle $[a, b]$.

démonstration : *On utilise le principe de dichotomie : on définit deux suite (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \ \text{ et } \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{si} \quad f(u_n) \cdot f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) \leqslant 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \ \text{ et } \ v_{n+1} = v_n & \text{si} \quad f(u_n) \cdot f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) \geqslant 0. \end{cases}$$

Par construction, les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Ce sont donc des suites adjacentes, qui convergent donc vers une limite dans $[a, b]$ que l'on note ℓ.

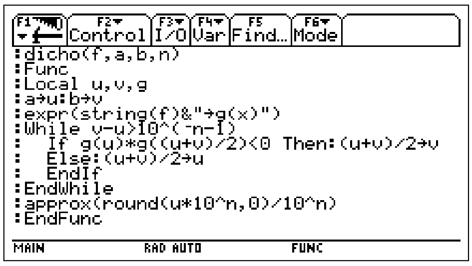
La continuité des f nous assure que $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(v_n) = f(\ell)$, donc en passant à la limite dans la relation $f(u_n) \cdot f(v_n) \leqslant 0$, on obtient

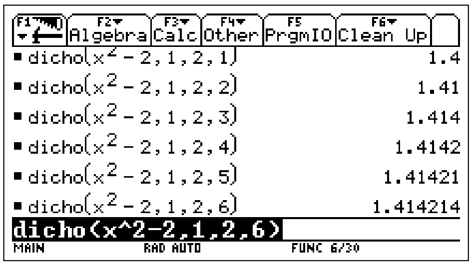
$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) \cdot f(v_n) \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \big(f(\ell)\big)^2 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(\ell) = 0.$$

■

Exercice : En utilisant cette méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à l'aide de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ définie sur $[1, 2]$.

Solution : On créé la fonction suivante à la calculatrice, qui prend comme argument la fonction considérée, les bornes de son intervalle de définition et le nombre de chiffres souhaité après la virgule de la valeur recherchée. En gros, la fonction calcule simultanément l'entier N tel que $v_n - u_n \leqslant 10^{-N-1}$ et les valeurs u_n et v_n aux différentes étapes. Il obtient alors au final deux nombres u et v tels que $v - u \leqslant 10^{-N-1}$, et renvoie alors les chiffres communs de u et v (logiquement, N après la virgule), qui est donc la valeur approchée recherchée :





On trouve alors $\sqrt{2} \approx 1,414214$. ◇

52.3.2 Développement décimal d'un nombre réel

Théorème 3 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

(i) $\forall n \geqslant 1, a_n \in \{0, \dots, 9\}$ **et** $a_0 \in \mathbb{Z}$,

(ii) $\nexists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N, a_n = 9$,

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

démonstration : *Soit u_n la valeur décimale approchée par défaut de x à 10^{-n} près. La double-inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité*

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Soit $m = u_n\, 10^n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0\, 10^n + a_1\, 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, 10 + a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^n$, par unicité de l'écriture en base 10.

Montrons encore que les coefficients a_i sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les mêmes au rang n et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double-inégalité

$$b_0 + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x < b_0 + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque $b_{n+1} \leqslant 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^n}$, et notre double-inégalité devient

$$b_0 + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leqslant x < b_0 + \dots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

L'unicité de la solution $(a_0, \dots, a_n)$ de la relation du (iii) au rang n nous permet d'affirmer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $a_i = b_i$.

Supposons enfin qu'il existe un entier naturel N tel que tout $n \geqslant N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissances de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0, 99\overline{9}\dots$ Or

$$0, 99\overline{9} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1,$$

et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout n alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. ■

Définition 3 : Dans ce cas, par passage à la limite,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

et l'on dit que c'est le *développement décimal illimité propre* de x, et on note de manière plus commode $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

`Remarque 3` : Un développement décimal illimité est dit impropre s'il ne vérifie pas le théorème 4. Par exemple, $1 = 1, 00\overline{0} = 0, 99\overline{9}$. Le premier est propre, le second est impropre.