

LEÇON N° 58 :

Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de \mathbb{R} . Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.

Pré-requis :

- Limites d'une suite réelle ;
- Fonctions à valeurs réelles : opérations algébriques, restriction à une partie de son ensemble de définition.

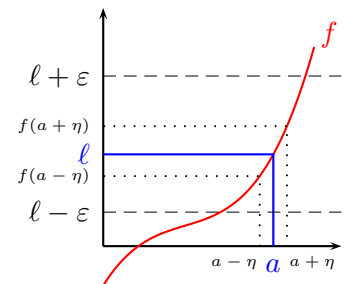
On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et \mathcal{D}_f son ensemble de définition. Si $D \subset \mathcal{D}_f$, on note $\overline{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap D \neq \emptyset\}$ le plus petit fermé de \mathbb{R} contenant D (i.e. l'adhérence de D). On se donne dans toute cette leçon un sous-ensemble D de \mathcal{D}_f et un réel $a \in \overline{D}$.

Remarque 1 : En particulier, si D est borné, les bornes supérieure et inférieure de D appartiennent à \overline{D} (théorème de la borne supérieure - inférieure).

58.1 Limite finie en un point de \mathbb{R}

Définition 1 : On dit que f admet pour limite $\ell \in \mathbb{K}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$



Théorème 1 : Si f admet une limite en a , alors elle est unique.

démonstration : Supposons que f admette deux limites $\ell_1 \neq \ell_2$ au point a . Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon, \\ \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

donc il existe $\eta'' = \inf(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} |x - a| < \eta'' \Rightarrow |\ell_2 - \ell_1| &= |\ell_2 - f(x) + f(x) - \ell_1| \\ &\leq |\ell_2 - f(x)| + |f(x) - \ell_1| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{3}|\ell_2 - \ell_1|$, de sorte que $\varepsilon > 0$. L'inégalité précédente devient alors

$$|\ell_2 - \ell_1| < \frac{2}{3}|\ell_2 - \ell_1|,$$

ce qui est absurde, donc $\ell_1 = \ell_2$. ■

Grâce à l'unicité de la limite, on peut introduire la notation suivante :

Notation : Sous réserve d'existence, l'unique limite $\ell \in \mathbb{K}$ de la fonction f au point a sera désormais notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Remarque 2 : Si $a \in \mathcal{D}_f$ et si f tend vers ℓ au point a , alors $\ell = f(a)$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors $a \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap \mathcal{D}_f \Rightarrow \forall \varepsilon' > 0, |f(a) - \ell| < \varepsilon \Rightarrow f(a) = \ell$.

Proposition 1 : Soient $B \subset D$ et $b \in \overline{B}$. Si f admet une limite en b , alors sa restriction à B , notée $f|_B$, admet la même limite en b .

démonstration : Triviale, en utilisant la définition et le fait que $x \in D$ pour tout $x \in B$. ■

Remarques 3 :

1. Avec $B = \mathcal{V} \cap D$, où \mathcal{V} désigne un voisinage de b (donc contenant b), on a que f admet une limite finie en b est équivalent à $f|_{\mathcal{V} \cap D}$ admet une limite en b : cette proposition est donc un résultat local.
2. La réciproque est fautive. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'admet aucune limite en aucun point de \mathbb{R} . Cependant, sa restriction à \mathbb{Q} (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) est la fonction constante égale à 1 (resp. 0).

Proposition 2 : Si f admet une limite finie en a , alors il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que f soit bornée sur $\mathcal{V} \cap D$.

démonstration : Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Montrons que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{V} \cap D$, où \mathcal{V} désigne un voisinage de a , c'est-à-dire un intervalle ouvert contenant a . f admet par hypothèse une limite finie notée ℓ en a , donc par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$. Il existe alors un tel voisinage \mathcal{V} contenant a tel que $x \in \mathcal{V} \cap D \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon = 1$, d'où $f(x) < 1 + |\ell|$. Le nombre $M = 1 + |\ell| \in \mathbb{R}^+$ vérifie la propriété. ■

58.2 Limites à gauche et à droite en a

Définition 2 : Si l'on ajoute à $\forall x \in D$ l'hypothèse $x < a$ (resp. $x > a$) dans la définition de la limite de f en a (définition 1), alors on parle de *limite à gauche* (resp. *limite à droite*) de f en a , et on note (sous réserve d'existence)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

Exemple : Soit f la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f n'admet pas de limite en 0, mais

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1.$$

Théorème 2 : f admet une limite en a si et seulement si f admet la même limite à gauche et à droite en a . Pour que cela soit possible, on suppose de plus que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\} \subset D$ et $a \notin D$.

démonstration : Le sens direct est immédiat. Montrons alors le sens indirect : on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad x < a \text{ et } |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in D, \quad x > a \text{ et } |x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta'' = \min(\eta, \eta') \mid \forall x \in D, x \neq a \text{ et } |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ (car $a \notin D$). ■

58.3 Opérations algébriques

Soient f, g deux fonctions telles que l'ensemble A défini par $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ soit non vide, et admettant respectivement ℓ_1 et ℓ_2 pour limites en un point $a \in \bar{A}$.

Théorème 3 :

- (i) Les fonctions $f + g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont définies sur A et admettent pour limites respectives $\ell_1 + \ell_2$, $\lambda\ell_1$ et $\ell_1\ell_2$ en a ;
- (ii) Si $\ell_2 \neq 0$, alors il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que f/g soit définie sur $\mathcal{V} \cap A$ et admette ℓ_1/ℓ_2 pour limite en a .

démonstration :

- (i) Rappelons que (proposition 2) il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{D}_f$ (\mathcal{V} voisinage de a), $|f(x)| < M$. Soit un tel M . Par définition,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta &\Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{k}, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta' &\Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{k'}, \end{aligned}$$

où les nombres k et k' vont être définis pour chacun des cas suivants.

fg : En choisissant $k = 2|\ell_2|$ et $k' = 2M$, on a l'existence d'un réel $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta''$ implique

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &\leq |f(x)||g(x) - \ell_2| + |\ell_2||f(x) - \ell_1| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + |\ell_2| \frac{\varepsilon}{2|\ell_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$f + g$: En choisissant $k = k' = 2$, on prouve l'existence d'un réel $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$ tel que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta''$ implique

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - \ell_1 - \ell_2| &= |f(x) - \ell_1 + g(x) - \ell_2| \\ &\leq |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

λf : Enfin, en choisissant $k = |\lambda|$, on conclut en montrant que pour tout $x \in A$, l'inégalité $|x - a| < \eta$ implique

$$|\lambda f(x) - \lambda\ell_1| = |\lambda||f(x) - \ell_1| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

- (ii) $\ell_2 \neq 0$ implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in A, |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < |\ell_2|/2$ (choix particulier de $\varepsilon > 0$). Il vient que sur $A \cap]a - \eta, a + \eta[$, on a $|g(x)| > |\ell_2|/2$ et $1/g$ est définie sur ce voisinage de a . Sur ce voisinage, on a

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| = \frac{|g(x) - \ell_2|}{|g(x)\ell_2|} \leq 2 \frac{|g(x) - \ell_2|}{\ell_2^2}.$$

Or g admet une limite finie ℓ_2 en a , donc en appliquant la définition, on trouve que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0 \mid \forall x \in A, |x - a| < \eta' \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \varepsilon \frac{\ell_2^2}{2}.$$

On conclut alors que pour tout $x \in A$,

$$|x - a| < \eta'' = \min(\eta, \eta') \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2} \right| < \varepsilon.$$

Ceci achève notre démonstration. ■

Proposition 3 : Si l'on suppose de plus que $f(x) \leq g(x)$, alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

démonstration : D'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - f(x)) = \ell_2 - \ell_1.$$

Supposons alors que $\ell_2 - \ell_1 < 0$. Il existe alors un intervalle I ouvert contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$, on a $g(x) - f(x) < 0$. On aboutit ainsi à une contradiction, prouvant que $\ell_2 - \ell_1 \geq 0$. ■

Remarque 4 : La réciproque est fautive. En effet, les fonctions $f(x) = 0$ et $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ vérifient toutes les deux $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ sans que $f \leq g$ au voisinage de 0 !

Théorème 4 (d'encadrement) : Soit h une fonction telle que $A \cap \mathcal{D}_h \neq \emptyset$ et admettant ℓ_3 pour limite en $a \in \overline{A \cap \mathcal{D}_h}$. Si pour tout $x \in A \cap \mathcal{D}_h$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, alors

$$(\ell_1 = \ell_2 = \ell) \Rightarrow \ell_3 = \ell.$$

démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux voisinages ouverts \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 contenant a tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{V}_1 \cap (A \cap \mathcal{D}_h), \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \\ \text{et } \forall x \in \mathcal{V}_2 \cap (A \cap \mathcal{D}_h), \quad \ell - \varepsilon \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon. \end{aligned}$$

Sur $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap (A \cap \mathcal{D}_h)$, on a donc $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \ell + \varepsilon$, ce qui se traduit par $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$. ■

Exemple : Par développement limité, on a au voisinage de 0 :

$$\underbrace{1 - \frac{x^3}{3!}}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0} \rightarrow 1} < \frac{\sin x}{x} < \underbrace{1}_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0} \rightarrow 1}, \quad \text{d'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Théorème 5 (de composition) : Soient D_1 et D_2 deux parties de \mathbb{R} , $f : D_1 \rightarrow D_2$, $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{D_1}$.

- (i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors $b \in \overline{D_2}$,
- (ii) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$.

démonstration :

- (i) Soit \mathcal{V}_2 un voisinage de b . Comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, il existe un voisinage \mathcal{V}_1 de a tel que $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \subset \mathcal{V}_2$. Or $\mathcal{V}_1 \cap D_1 \neq \emptyset$ (car il contient a), donc $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \neq \emptyset$ et puisque $f(\mathcal{V}_1 \cap D_1) \subset \mathcal{V}_2 \cap D_2$, $\mathcal{V}_2 \cap D_2 \neq \emptyset$. D'où $b \in \overline{D_2}$.
- (ii) Soit \mathcal{W} un voisinage de ℓ . Il existe un voisinage \mathcal{V} de b tel que $g(\mathcal{V} \cap D_2) \subset \mathcal{W}$ puis un voisinage \mathcal{U} de a tel que $f(\mathcal{U} \cap D_1) \subset \mathcal{V}$. D'où $f(\mathcal{U} \cap D_1) \subset \mathcal{V} \cap D_2$, d'où finalement $g(f(\mathcal{U} \cap D_1)) \subset g(\mathcal{V} \cap D_2) \subset \mathcal{W}$, et il vient que $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. ■

Exercice : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$.

Solution : Posons $f(x) = 3x$ et $g(x) = \frac{3}{2} \frac{\sin x}{x}$, de sorte que

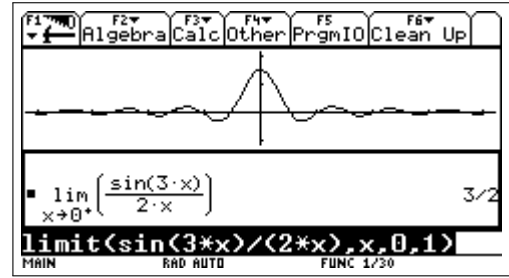
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{3}{2} \quad (\text{cf. exemple précédent}).$$

Puisque $(g \circ f)(x) = \frac{3}{2} \frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{\sin(3x)}{2x}$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Nous avons évidemment utilisé le théorème de composition donné ci-dessus. \diamond

Cet exemple est bien choisi car il est difficile de bien voir sur la calculatrice que cette fonction n'est pas définie en 0 :



Théorème 6 (caractérisation séquentielle) : Une fonction f tend vers ℓ au point a si et seulement si pour toute suite réelle (u_n) de points de D qui converge vers a , $f(u_n)$ converge vers ℓ .

démonstration :

" \Rightarrow " : Pour tout voisinage ouvert \mathcal{V}_2 de ℓ il existe un voisinage ouvert \mathcal{V}_1 de a tel que $f(\mathcal{V}_1 \cap D) \subset \mathcal{V}_2$. Or il existe un entier naturel N tel que $u_n \in \mathcal{V} \cap D$ pour tout $n \geq N$. Donc $f(u_n) \in \mathcal{V}$, c'est-à-dire $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

" \Leftarrow " : Montrons ce résultat par contraposée : supposons que f n'admette pas ℓ pour limite. Alors

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[\cap D \text{ et } |f(x) - \ell| \geq \varepsilon.$$

On note alors x_n l'élément x associé à chaque entier n , de sorte que l'on ait construit une suite tendant vers a , sans pour autant que $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. \blacksquare

Exercice : Montrer que $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Solution : Pour cela, considérons la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Alors $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$ n'admet pas de limite en 0, donc $f(x)$ non plus par le théorème précédent. \diamond

58.4 Continuité en un point

À partir d'ici, on considérera un réel $a \in D$.

Définition 3 :

- On dit que f est continue en a si f admet une limite finie en ce point (nécessairement égale à $f(a)$). Symboliquement,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in D, \quad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- On dit que f est continue sur $D' \subset D$ si f est continue en chaque point de D' .
- Si f n'est pas continue en a , on dit qu'elle est discontinue en a .

Théorème 7 :

- (i) Si f et g sont deux fonctions continues en un point A de l'ensemble $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ supposé non vide, alors $f + g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et fg sont continues en a . De plus, si $g(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage \mathcal{V} de a tel que f/g soit définie sur $\mathcal{V} \cap (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ et la restriction de f/g à $\mathcal{V} \cap (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ soit continue en a .
- (ii) Soient $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \in D_2$. Si f est continue en a et g en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ l'est en a .
- (iii) Une fonction f définie sur D est continue en a si et seulement si pour toute suite (u_n) de D convergeant vers a , $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

démonstration : Grâce à la définition 3, on peut directement affirmer que ces trois résultats sont respectivement la conséquence directe des théorèmes 3, 5 et 6. ■

Théorème 8 : Soit $a \notin D$. Si $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite finie ℓ en a , alors il existe une unique fonction φ définie sur $\mathcal{D}_f \cup \{a\}$ qui coïncide avec f sur \mathcal{D}_f , et continue en a . La valeur de φ en a est ℓ .

démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, on a $|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Donc $|\varphi(x) - \ell| < \varepsilon$, et donc par définition, φ est continue en a et $\varphi(a) = \ell$. L'unicité provient de celle de la limite de f en a . ■

Exemples :

- $D = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sin x/x$. On choisit $a = 0$ et $\ell = 1$ (d'après un exemple précédent). On pose alors

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- $g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est continue et bornée sur cet intervalle, mais n'admet pas de limite en 0, donc il n'existe pas de fonction φ comme dans le théorème.

Définition 4 : La fonction φ définie par le théorème précédent est appelée *prolongement (par continuité) de f en a* .

Définition 5 : Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux* si elle admet sur $[a, b]$ un nombre fini de points de discontinuité et qu'elle y admet des limites finies à gauche et à droite.