LEÇON N° 59 :

Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :

– *Notions de limite finie ou infinie en un point de* $\mathbb{R}$*, ainsi que* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *;*
– *Inégalité triangulaire ;*
– *Croissances comparées.*

Dans toute cette leçon, f désigne une fonction à valeurs réelles continue, dont l'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f$. On considère aussi l'intervalle $]a, +\infty[$, où a est un réel tel que cet intervalle soit inclus dans $\mathscr{D}_f$.

59.1 Limite à l'infini

59.1.1 Limite finie et infinie

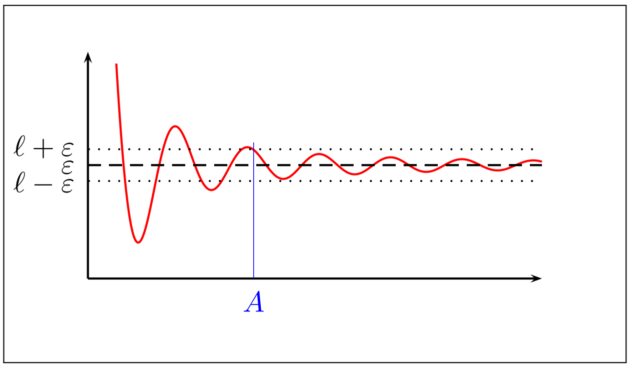
Définition 1 : On dit que f *admet un réel* ℓ *comme limite en* $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

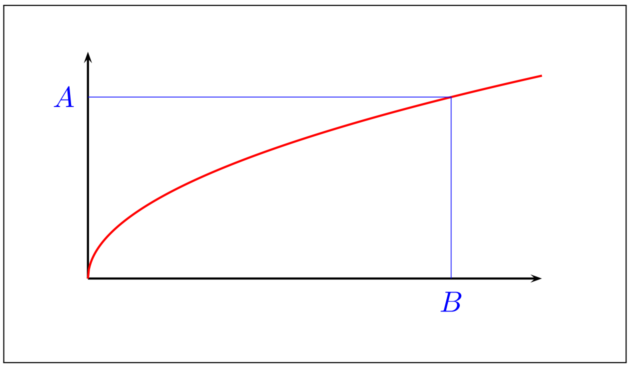
On dit que f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en $+\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant B \qquad \text{(resp. } f(x) \leqslant B\text{)}.$$

Interprétations graphiques



Limite finie



Limite infinie

59.1.2 Unicité de la limite

Proposition 1 : Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{1}{a}]$ avec $a > 0$ (resp. $[-\frac{1}{a}, 0]$ avec $a < 0$) par

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Alors f admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si g admet ℓ pour limite en 0.

démonstration : *On ne montre le résultat qu'en $+\infty$, celui en $-\infty$ se montrant de manière analogue. Soit $\varepsilon > 0$. Alors*

$$\exists\ A \in \mathbb{R}^+ \mid \forall\ x \in \mathscr{D}_f, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

En posant $X = \frac{1}{x}$ et $a = \frac{1}{A}$, ceci équivaut à

$$\exists\ a \in \mathbb{R}^+ \mid \forall\ X \in \mathscr{D}_f, 0 < X < a \Rightarrow \left| f\left(\frac{1}{X}\right) - \ell \right| < \varepsilon,$$

ce qui équivaut encore à

$$\exists\ a \in \mathbb{R}^+ \mid \forall\ X \in \mathscr{D}_g, 0 < X < a \Rightarrow |g(X) - \ell| < \varepsilon,$$

donc $\lim\limits_{X\to 0} g(X) = \ell$. Le résultat se montre de la même manière si $\ell = \pm\infty$. ■

Théorème 1 : Si f admet une limite en $\pm\infty$, alors elle est unique.

démonstration : *Si $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ sont deux limites de f en $+\infty$, alors le lemme précédent nous assure que*

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \ell \ \text{ et } \ \lim_{x\to 0} g(x) = \ell' \qquad \text{avec } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'unicité est déduite de celle de la limite en un point de $\mathbb{R}$. ■

Grâce à l'unicité de la limite, on peut introduire la notation suivante :

Notation : $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim f$, où $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Cette leçon traite entièrement des limites à l'infini, d'où la liberté prise pour la seconde notation. C'est celle qui sera le plus utilisée dans la suite, et sauf mention contraire, elle symbolisera tout le temps une limite lorsque x tend vers l'infini.

59.1.3 Propriétés

Le lemme précédent nous assure que les propriétés relatives aux opérations algébriques, à la composition et à la comparaison de fonctions sont analogues à celles qui concernent les limites en un point réel. Nous avons donc (les limites sont en $+\infty$ ou en $-\infty$) :

Soient f, g deux fonction définies sur un ensemble contenant l'intervalle $D^+ =]a, +\infty[$ (resp. $D^- =]-\infty, a[$). La fonction sgn donne simplement le signe de son argument (par exemple, $\ell > 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}(\ell) = +$).

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	$\ell\ell'$	$\mathrm{sgn}(\ell')\infty$	$-\mathrm{sgn}(\ell')\infty$	0
$+\infty$	$\mathrm{sgn}(\ell)\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\mathrm{sgn}(\ell)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
0	0	FI	FI	0

Limites de la fonction fg

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	ℓ/ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	0	FI	FI	FI
$-\infty$	0	FI	FI	FI
0	$\mathrm{sgn}(\ell)\infty$	FI	FI	FI

Limites de la fonction f/g

$\lim g \backslash \lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell \neq 0$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ'
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	$-\infty$
0	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	0

Limites de la fonction $f + g$

Exemples :

1. La fonction
$$\begin{array}{rcl} f :]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$
peut être vue comme le produit de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ par elle-même. Puisque $\lim g = 0$, $\lim f = 0$ d'après le tableau des limites d'une fonction « produit » ;
2. Soient $f(x) = 4x^3 + 3x$ et $g(x) = 2x + 1$. On a $\lim f = \lim g = +\infty$, mais le tableau des limites d'une fonction « quotient » donne une forme indéterminée pour f/g. Cependant,
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x^3 + 3x}{2x + 1} = \frac{4x^2 + 3}{2 + \frac{1}{x}} \quad \begin{array}{l} \} \to +\infty \\ \} \to 2 \end{array} ,$$
d'où $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$;

3. De la même manière, on détermine que

$$\begin{array}{rcl} g :]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lim g = 1.$$

Proposition 2 : Soient u, v, f trois fonctions définies sur des domaines contenant $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$) pour tout réel A. S'il exite $M \in \mathbb{R}$ tel que $x > M$ (resp. $x < M$) et $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$, alors :
*** $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = \lim_{x\to\pm\infty} v(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$;**
*** $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$;**
*** $\lim_{x\to\pm\infty} v(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$.**

démonstration : *On se rapporte,* via *la lemme, aux résultats connus sur les limites en un point de* $\mathbb{R}$.
■

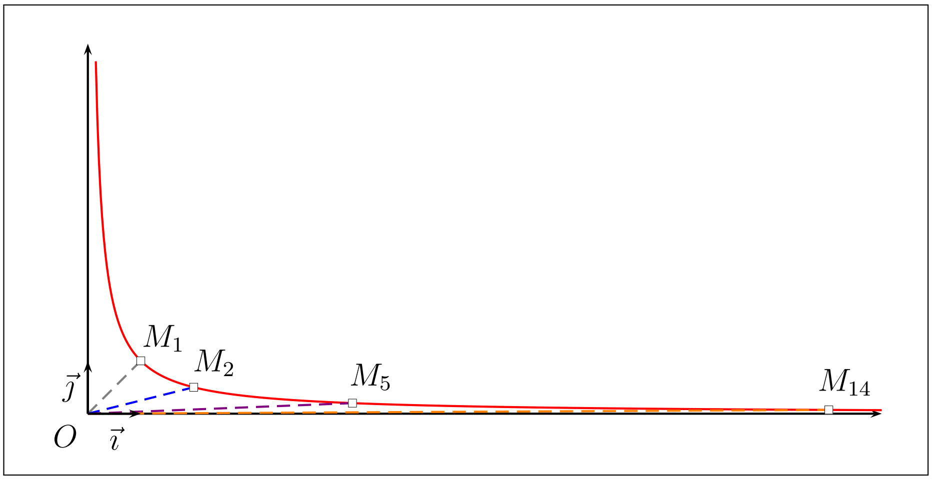
59.2 Branches infinies

Soient $\mathscr{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (plus facile pour les calculs de distances), I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $a \in \overline{I} \backslash I$, $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et M_x le point de $\mathscr{C}_f$ ayant pour coordonnées $\big(x, f(x)\big)$.

Définition 2 : On dit que $\mathscr{C}_f$ *admet une branche infinie en a* si

$$\lim_{x\to a} OM_x = +\infty.$$

Interprétation graphique, avec la fonction inverse



`Remarques 2 :`

– Cette définition ne dépend pas du point O. En effet, si O' est un autre point de $\mathscr{P}$, alors par inégalité triangulaire, $OO' + O'M_x \geqslant OM_x$, c'est-à-dire $O'M_x \geqslant OM_x - OO'$. On en déduit que

$$\lim_{x\to a} OM_x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} O'M_x = +\infty.$$

– Si $a \in \{-\infty, +\infty\}$, alors $\lim_{x\to a} OM_x = +\infty$ (c'est-à-dire que $\mathscr{C}_f$ admet une branche infie en $+\infty$ ou $infty$. En effet,

$$\overrightarrow{OM_x} = x\vec{\imath} + f(x)\vec{\jmath} \Rightarrow OM_x = \sqrt{x^2 + f(x)^2} \geqslant |x|,$$

et $x \to \pm\infty$ achève cette démonstration.

Proposition 3 : Si $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$.

démonstration *: On a* $\lim_{x\to a} OM_x{}^2 = a^2 + \lim_{x\to a} f(x)^2$, *donc*

$$\lim_{x\to a} OM_x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)^2 = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty.$$

■

Définition 3 : S $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie en a, on dit que *la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en a.*

Exemples (les captures d'écran à la calculatrice se trouvent juste en-dessous) :

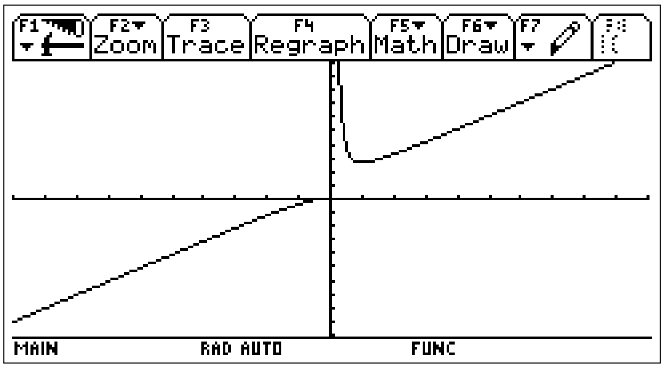
1. Soit f la fonction définie sur $I_1 =]0, +\infty[$ par $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$. Grâce aux croissances comparées, on sait que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, donc que $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en 0 (à droite).

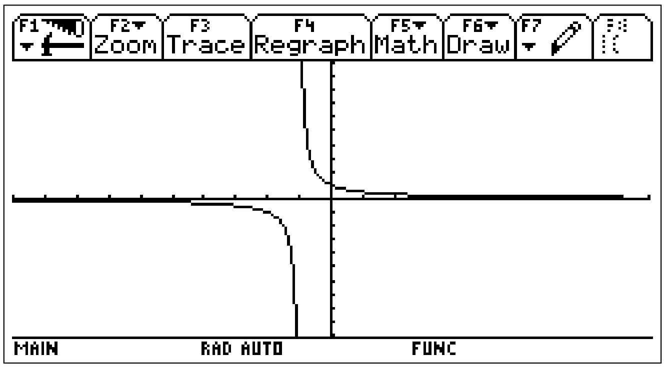
   Par contre, si cette même fonction était définie sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, alors on aurait que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, et il n'y a donc pas d'asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en 0 à gauche !

2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On détermine facilement que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty,$$

   donc $x = -1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$ en -1.





On se place maintenant dans un voisinage de $+\infty$ et tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ (dans un cas plus simple, si cette limite est finie et vaut ℓ, on dira que *la droite d'équation* $y = \ell$ *est asymptote horizontale à* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$).

Définition 4 : La droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$) est *asymptote oblique à* $\mathscr{C}_f$ *en* $+\infty$ si

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0.$$

Proposition 4 : Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($\neq 0$) et $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2+1}.$$

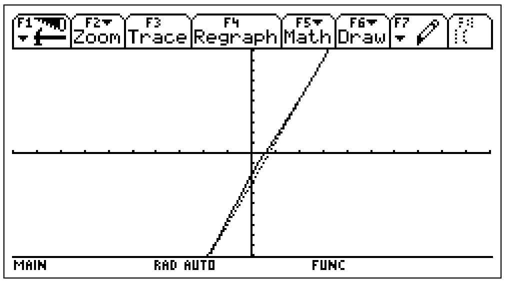
Montrer que la droite d'équation $y = 4x - 3$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Solution : On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (4x-3) &= \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{x^2+1} - \frac{(4x-3)(x^2+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{4x^3 - 3x^2 + 4x - 2 - (4x^3 + 4x - 3x^2 - 3)}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Cette quantité tend clairement vers 0 lorsque x tend vers l'infini, donc la droite d'équation $y = 4x - 3$ est bien asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.
$\diamondsuit$

Cet exemple est bien choisi car il est difficile de bien le voir sur la calculatrice :



59.3 Branches paraboliques

Définition 5 :

1. **Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(0y)$ en $+\infty$;**
2. **Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(0x)$ en $+\infty$;**
3. **Si $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - ax\right) = \pm\infty$, alors on dit que $\mathscr{C}_f$ admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$ en $+\infty$;**

Exemples (les calculs, non difficiles, sont laissés au lecteur) :

1. $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto x^2, \ldots$
2. $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto \sqrt{x}, \ldots$
3. $x \longmapsto 3x + \ln x$, $x \longmapsto \dfrac{2x+5+x\sqrt{x}}{3x+2}, \ldots$

Exercice : Montrer que $\mathscr{C} : y = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$ admet une asymptote en $-\infty$ et $+\infty$. Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à cette droite.

Solution : On utilise la proposition 4. En effet,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+e^{1/x}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

On a donc trouvé le nombre a non nul de cette proposition. Poursuivons :

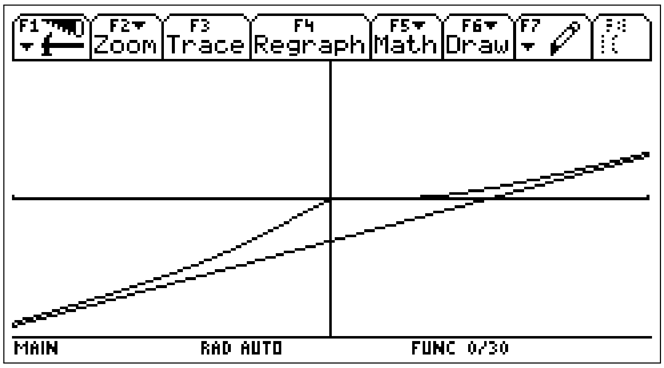
$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{x}{1+e^{1/x}} - \frac{x}{2} = \frac{x - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}e^{1/x}}{1+e^{1/x}} = \frac{x(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{1/x})}{1+e^{1/x}} = \frac{x\big(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\big)}{1+e^{1/x}}.$$

On a pu utiliser le développement limité de l'exponentielle au voisinage de 0 car $1/x$ tend justement vers 0 lorsque $x \to \infty$. Ceci nous donne alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\big)}{1+e^{1/x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+e^{1/x}} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Nous avons ainsi trouvé le nombre b de la proposition 4, qui nous permet donc d'affirmer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$. Il se trouve que les calculs donnent le même résultats pour $-\infty$, et on peut donc dire que $\mathscr{D}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $\pm\infty$.

Voici la représentation graphique à la calculatrice : la fenêtre est limitée aux abscisses et ordonnées comprises entre -1 et 1, car en-dehors, on n'aurait pas vu grand chose...



Je laisse au lecteur le soin de faire le calcul permettant de conclure que $\mathscr{C}$ est toujours au-dessus de $\mathscr{D}$.