

# LEÇON N° 60 :

## Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.

### Pré-requis :

- $I$  est un intervalle si  $\forall a, b \in I \mid a \leq b, [a, b] \subset I$  ;
- Toute partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure ;
- Théorème des gendarmes ;
- Définition de la bijection (au sens injection et surjection).

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, et  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $I$ .

### 60.1 Image d'un intervalle par une fonction continue

#### 60.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1 (T.V.I.) :** Soient  $a, b \in I$  tels que  $a < b$ , et  $\lambda$  un réel compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ .

*démonstration :* Avant de commencer, nous allons énoncer et démontrer deux lemmes qui seront utiles :

**Lemme 1 (propriété de la borne supérieure) :** Soit  $X$  une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . Soit  $c$  sa borne supérieure. Alors il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $c$ .

*démonstration :* Comme  $c$  est la borne supérieure de  $X$ , il est le plus petit des majorants de  $X$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in X \mid c - \varepsilon < x \leq c.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists x_n \in X \mid c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

On en déduit (théorème des gendarmes) que la suite  $(x_n)$  converge vers  $c$ . □

**Lemme 2 :** Soient  $X$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $X$  qui converge vers un réel  $\ell \in X$ , et  $f$  une fonction continue en  $\ell$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(\ell)$ .

*démonstration :* Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $f$  est continue en  $\ell$ , on a que

$$\exists \eta > 0 \mid |x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon.$$

Cependant, la suite  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ , ce qui veut dire que pour ce réel  $\eta$  ci-dessus,

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow |x_n - \ell| < \eta.$$

Par transitivité des implications, on trouve alors que  $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(\ell)| < \varepsilon$ , ce qui prouve que  $(f(x_n))$  converge bien vers  $f(\ell)$ .  $\square$

Nous allons donc pouvoir commencer la démonstration du T.V.I. Déjà, si  $f(a) = f(b)$ , alors on a nécessairement  $\lambda = f(a) = f(b)$ , et il suffit de choisir par exemple  $c = a$  pour conclure. On peut donc supposer dans la suite que  $f(a) < f(b)$  (quitte à choisir  $g = -f$  si jamais  $f(a) > f(b)$ ). Notons

$$X = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

Cet ensemble  $X$  est non vide : en effet, d'après notre petite hypothèse,  $f(a) \leq \lambda$ , donc  $a \in X$ .

Cet ensemble  $X$  est majoré par  $b$  : c'est clair, puisque  $X$  est inclus dans  $[a, b]$ .

Cet ensemble  $X$  admet donc une borne supérieure  $c \in [a, b]$ .

**Montrons que  $f(c) \leq \lambda$  :** Comme  $c = \sup X$ , il existe une suite  $x_n$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $c$ . Mais puisque les  $x_n$  sont dans  $X$ , ils vérifient l'inégalité  $f(x_n) \leq \lambda$ . Et enfin, puisque  $f$  est continue en  $c$ , le passage à la limite dans cette inégalité donne le résultat recherché :  $f(c) \leq \lambda$ .

**Montrons que  $f(c) \geq \lambda$  :** Notons déjà que si  $c = b$ , alors  $f(c) = f(b) \geq \lambda$ , et la démonstration s'achève. Supposons alors que  $c < b$ . Puisque  $c = \sup X$ , on a

$$\forall x \in ]c, b], x \notin X \text{ (c'est-à-dire } f(x) > \lambda).$$

Soit alors  $(y_n)$  une suite d'éléments de  $]c, b]$  qui converge vers  $c$  (existe d'après le lemme 1 qu'on peut très facilement adapter à la borne inférieure). On a donc  $f(y_n) > \lambda$ . Comme précédemment, la continuité de  $f$  au point  $c$  nous permet de passer cette inégalité à la limite afin d'obtenir  $f(c) \geq \lambda$ .

**Conclusion :** On arrive donc à  $f(c) = \lambda$ , ce qui achève cette démonstration.  $\blacksquare$

**Corollaire 1 :** Si  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors  $f(I)$  est un intervalle.

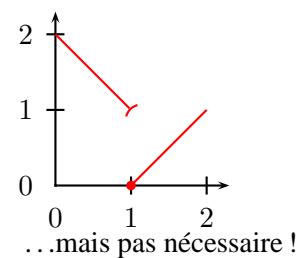
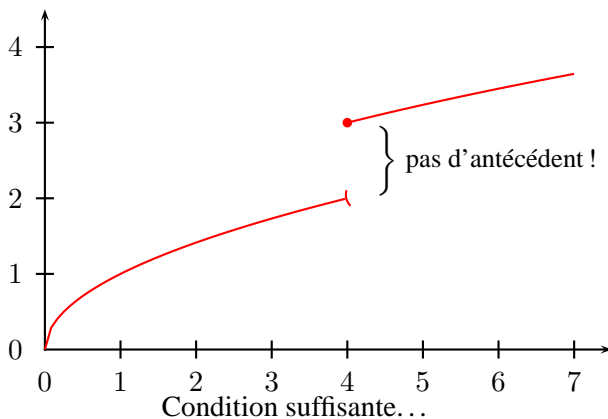
**démonstration :** Soient  $y_1$  et  $y_2$  dans  $f(I)$  tels que  $y_1 \leq y_2$ . Il s'agit de montrer que tout élément  $\lambda$  de  $[y_1, y_2]$  est élément de  $f(I)$  (par définition d'un intervalle). Comme  $y_1, y_2 \in f(I)$ , il existe  $a$  et  $b$  tels que  $f(a) = y_1$  et  $f(b) = y_2$ . Puisque  $I$  est un intervalle, on a  $[a, b] \subset I$ . Il s'en suit que  $f$  continue sur  $[a, b]$  (en effet,  $[a, b] \subset I$  et  $f$  est continue par hypothèse sur  $I$ ) implique que

$$\forall \lambda \in [y_1, y_2], \quad \exists c \in [a, b] \mid f(c) = \lambda,$$

en utilisant le T.V.I. On en déduit directement que  $\lambda \in f(I)$ , d'où le résultat.  $\blacksquare$

Remarques 1 :

1. L'hypothèse «  $f$  est une fonction continue » est suffisante, mais pas nécessaire :



Dans le premier cas, la fonction  $f$  définie sur  $[0, 7]$  n'est pas continue, et on voit clairement que  $f(I)$  n'est pas un intervalle.

Dans le second cas, la fonction  $g$  est définie par :

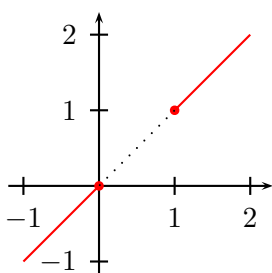
$$g : [0, 2] \longrightarrow [0, 2]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

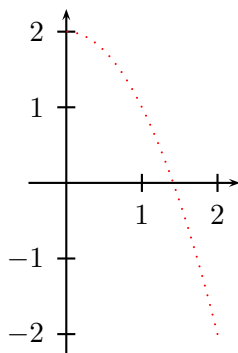
Cette fonction n'est pas continue mais  $f([0, 2]) = [0, 2]$  est bien un intervalle.

2. Ce théorème ne fonctionne pas non plus si  $I$  n'est pas un intervalle. En effet, la fonction  $f$  définie sur  $[-1, 0] \cup [1, 2]$  par  $f(x) = x$  est bien continue, mais  $f(I) = [-1, 0] \cup [1, 2]$  n'est pas un intervalle.
3. Si  $I$  est un intervalle d'un ensemble autre que  $\mathbb{R}$ , le théorème ne fonctionnera pas : si  $f$  est la fonction définie sur  $I = [0, 2] \cap \mathbb{Q}$  par  $f(x) = 2 - x^2$ , alors  $f$  est bien continue sur  $I$ , mais  $f(I)$  n'est pas un intervalle car 0 (qui vérifie bien  $f(0) < 0 < f(2)$ ) n'admet pas d'antécédent par cette fonction.
4. Le T.V.I. donne un antécédent de  $\lambda$ , mais il n'est pas forcément unique. En effet, si  $f$  est la fonction définie sur  $[-2, 2]$  par  $f(x) = 2 - x^2$ , alors on sait que 1 a deux antécédents :  $-1$  et  $1$ .

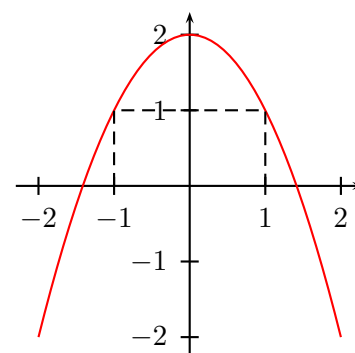
Voici les graphiques correspondant aux exemples des points 2, 3 et 4 :



$I$  doit être un intervalle !



0 n'a pas d'antécédent



Deux antécédents

### Exercices :

1. Montrer que si  $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$  avec  $a < b$  est une fonction continue, alors elle admet au moins un point fixe.
2. Montrer que tout polynôme à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine.

### Solution :

1. Définissons sur  $[a, b]$  la fonction  $g$  par  $g(x) = f(x) - x$ , de sorte que  $g(a) = f(a) - a > 0$  (car  $f(a) \in [a, b]$ ) et  $g(b) = f(b) - b < 0$  (car  $f(b) \in [a, b]$ ). Puisque  $0 \in [g(b), g(a)]$ , le T.V.I. nous assure l'existence d'un nombre  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f(c) = c$ .
2. Notons  $P$  un tel polynôme. Puisqu'il est de degré impair, et quitte à considérer le polynôme  $Q = -P$ , on peut supposer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty.$$

Il existe donc deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$ ,  $P(a) < 0$  et  $P(b) > 0$ . Comme précédemment, puisque  $0 \in [P(a), P(b)]$ , le T.V.I. nous donne une valeur  $c \in [a, b]$  tel que  $P(c) = 0$ .  $\diamond$

## 60.1.2 Image d'un segment

**Proposition 1 : Toute application continue  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est bornée et atteint ses bornes.**

*démonstration : Montrons d'abord que  $f$  est bornée : Supposons le contraire. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists u_n \in [a, b] \mid f(u_n) \geq n.$$

*Mais on peut extraire (grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass) une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  qui converge vers un réel  $\lambda \in [a, b]$ . Par le lemme 2, on aurait aussi que  $\lim f(u_{\varphi(n)}) = f(\lambda)$ , ce qui est une contradiction : en effet, puisque  $\varphi$  est par définition strictement croissante, on a que*

$$f(u_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n,$$

*qui tend, lui, vers  $+\infty$ .*

*Montrons ensuite que  $f$  atteint ses bornes : Soit  $M = \sup f([a, b])$ . Alors, d'après le lemme 1 (page 1),*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists x_n \in [a, b] \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M.$$

*Cependant, on peut extraire de  $(x_n)$  une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers un réel  $\lambda \in [a, b]$  (car  $[a, b]$  est fermé). Toujours par le lemme 2, la limite de  $f(x_{\varphi(n)})$  est  $f(\lambda)$ . On en déduit que  $f(\lambda) = M$ , où  $\lambda \in [a, b]$ , et la borne supérieure est atteinte. Un raisonnement analogue permet de montrer que la borne inférieure est aussi atteinte. ■*

**Définition 1 : Un segment de  $\mathbb{R}$  est un intervalle fermé et borné de  $\mathbb{R}$ .**

**Théorème 2 : L'image d'un segment par une application continue est un segment.**

*démonstration :  $f(I)$  est un intervalle d'après le corollaire 1, et cet intervalle est borné et fermé d'après la proposition 1. ■*

Remarques 2 :

1. Une fonction non continue sur un intervalle n'est pas forcément bornée. Considérer la fonction

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Si l'intervalle considéré dans le théorème n'est pas un segment, alors on ne pourra pas conclure : soit parce que la fonction n'atteindra pas ses bornes, soit plus simplement parce qu'elle n'est pas majorée.
3. Comme dans la remarque précédente, la continuité n'est qu'une condition suffisante dans la proposition 1 et le théorème 2. On peut se contenter du même exemple déjà donné (reparque 1, point 1)...

## 60.2 Fonctions continues strictement monotones

**Proposition 2 :** Si  $f$  est monotone sur  $I$  et si  $f(I)$  est un intervalle, alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**démonstration :** Supposons pour cette démonstration que  $f$  est croissante. Nous allons raisonner par l'absurde en supposant de plus que  $f$  n'est pas continue en un certain point  $x_0$ . Dans ce cas, on aura nécessairement

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0) \quad (b) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) > f(x_0) \quad (\#).$$

On ne va étudier que ce premier cas (b), l'autre se démontrant de manière analogue. Soit  $y$  un nombre de l'intervalle  $] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0)[$ . Puisque  $I$  n'est pas réduit à un point, il existe un réel  $u \in I \cap ] -\infty, x_0[$  qui vérifie  $f(u) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  puisque  $f$  est croissante.  $f(I)$  étant un intervalle (par hypothèse), il devrait contenir le réel  $y$ . On devrait donc avoir  $]f(u), f(x_0)[ \subset I$ . Cependant, pour tout réel  $x < x_0$ , on a que  $f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  et pour tout réel  $x \geq x_0$ , on a  $f(x) \geq f(x_0)$ , ce qui prouve que  $y \notin ] \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0)[$ , ce qui est en contradiction avec ce qui est écrit légèrement plus haut. ■

**Théorème 3 :** Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone sur  $I$ . Alors :

- (i)  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ .
- (ii) La fonction réciproque  $f^{-1}$  est continue (même strictement monotone) sur  $f(I)$  et de même sens de variations que  $f$ .
- (iii) Si  $f$  est dérivable en un point  $x_0 \in I$  et si  $f'(x_0) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$ , et

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**démonstration :**

- (i) Supposons  $f$  non injective. Il existe donc  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $I$  avec  $\alpha \neq \beta$  tels que  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Ceci contredit le fait que  $f$  soit strictement monotone.  $f$  réalise donc bien une bijection de  $I$  sur  $f(I)$ , car  $f : I \longrightarrow f(I)$  est clairement surjective.
- (ii) Soient  $a, b \in f(I)$  tels que  $a < b$ . On suppose  $f$  strictement croissante. Il existe donc  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $I$ , avec  $\alpha < \beta$ , tels que  $f(\alpha) = a$ ,  $f(\beta) = b$ . On en déduit que  $\alpha = f^{-1}(a)$  et  $\beta = f^{-1}(b)$ , donc que  $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$ . Ceci signifie que  $f^{-1}$  est strictement croissante (et a donc le même sens de variations que  $f$ ). La proposition précédente s'occupe de conclure que  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  : en effet,  $f^{-1}(f(I)) = I$  est bien un intervalle, et les hypothèses de la proposition sont bien remplies.
- (iii) Pour simplifier les notations, on pose  $X_0 = f(x_0)$  et  $X = f(x)$ . Alors

$$\frac{f^{-1}(X) - f^{-1}(X_0)}{X - X_0} = \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Puisque  $X \neq X_0 \Rightarrow f^{-1}(X) \neq x_0$ , le théorème de composition des limites permet de conclure

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f^{-1}(X) - f^{-1}(X_0)}{X - X_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

d'où le résultat. ■

Remarque 3 :

1. Si  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors il suffit de dériver la fonction  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_I$  en  $x_0$  pour obtenir

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1,$$

d'où  $f'(x_0) \neq 0$  et la formule donnée en (iii). Avec les hypothèses du théorème 3, la condition  $f'(x_0) \neq 0$  est donc équivalente à dire que  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(x_0)$ .

2. Si  $f$  est dérivable sur tout  $I$  et e s'annule jamais sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  aussi, et de plus

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

## 60.3 Applications

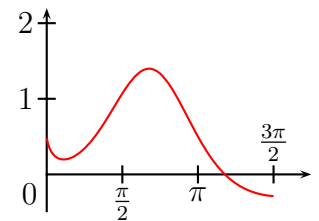
### 60.3.1 Racines

Le T.V.I. nous donne en particulier que si  $f$  est une fonction continue de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , alors  $f$  admet au moins une racine dans l'intervalle  $]a, b[$  (bords exclus, car la condition  $f(a) \cdot f(b) < 0$  implique  $f(a) \neq 0$  et  $f(b) \neq 0$ , c'est-à-dire que les racines de  $f$  ne peuvent être  $a$  ou  $b$ ).

Par exemple, la fonction

$$f : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^{\sin x} - \frac{1}{2}$$

est continue (voir courbe ci-dessous) sur son intervalle de définition, et l'on vérifie aisément que  $f(0) = 1/2 > 0$  et  $f(3\pi/2) < 0$ . On en déduit qu'il existe au moins une racine de  $f$  dans l'intervalle  $]0, 3\pi/2[$  :



### 60.3.2 Réciproques de fonctions

Les quatre fonctions

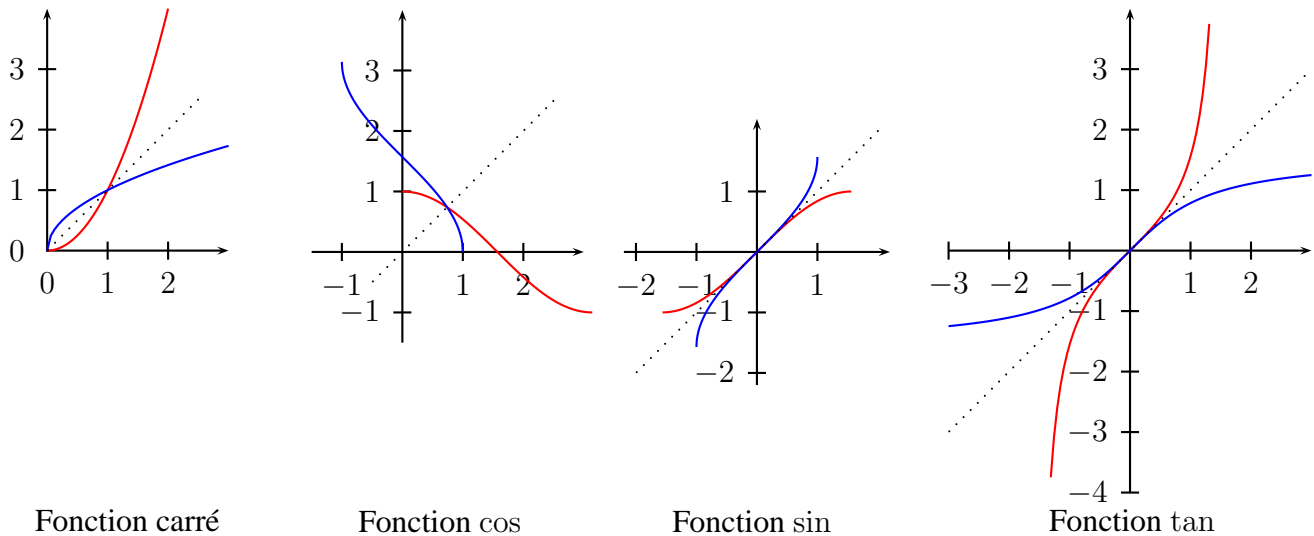
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & \cos : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto x^n & x &\longmapsto \cos x \\ \sin : [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] & \text{et} & \tan : ]-\pi/2, \pi/2[ &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \sin x & & x &\longmapsto \tan x \end{aligned}$$

sont toutes continues, et strictement monotones (respectivement croissante, décroissante, croissante et croissante). Elles définissent donc chacune une fonction réciproque qui respecteront le sens de variations. Celles-ci se notent :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x} & x &\longmapsto \arccos x \\ \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] & \text{et} & \arctan : [-1, 1] &\longrightarrow ]-\pi/2, \pi/2[ \\ x &\longmapsto \arcsin x & & x &\longmapsto \arctan x \end{aligned}$$

Cela dit, il existe des fonctions pour lesquelles l'expression de la réciproque n'est pas aisée à trouver. Mais une fonction  $f$  et sa réciproque vérifient toutes les deux une propriété géométrique due au fait que

«  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$  » : leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation  $y = x$ ). Traçons les quatre précédentes courbes et leurs réciproques respectives pour s'en convaincre (en rouge chaque fonction, en bleu sa réciproque) :



### 60.3.3 Dérivation

De manière évidente, la théorème 3 nous donne des formules très intéressantes pour la dérivée des réciproques des fonctions cos et sin. En effet, remarquons déjà que comme cos (resp. sin) est positif sur l'intervalle  $[-\pi/2, \pi/2]$  (resp.  $[0, \pi]$ ), on a

$$\begin{aligned} \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} &\Rightarrow \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ et} \\ \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} &\Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\arccos'(\cos(x)) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \arccos'(x) = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

De la même manière, on montre que

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pour finir, puisque

$$\tan' x = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

on a que

$$\arctan'(\tan x) = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} \Leftrightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

© 2010 par Martial LENZEN.

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L. 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteur.