LEÇON N° 69 :

Fonctions polynômes.

Pré-requis :
- *Dérivabilité, continuité des fonctions numériques ;*
- *Notions d'espaces vectoriels, de sous-espaces vectoriels ;*
- *Formule du binôme de Newton.*

On se place dans un corps $\mathbb{K}$, généralement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On utilisera souvent l'abus de langage consistant à désigner une fonction par son expression (on parlera de la fonction x^2 au lieu de $x \mapsto x^2$).

69.1 Fonction puissance

Proposition 1 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \longmapsto x^k$ est continue et dérivable sur $\mathbb{K}$.

démonstration : *La fonction $x \longmapsto x$ est trivialement continue (utiliser a posteriori la définition de la continuité pour s'en convaincre), donc f_k l'est aussi en tant que produit de fonctions continues. Montrons encore la dérivabilité. Soit $x_0 \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}$ différent de x_0, on a :*

$$f_k(x) - f_k(x_0) = x^k - x_0^k = (x - x_0) \sum_{i=0}^{k-1} x^i\, x_0^{k-1-i} \Rightarrow \frac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = \sum_{i=0}^{k-1} x^i\, x_0^{k-1-i}.$$

Par passage à la limite, il vient alors que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_k(x) - f_k(x_0)}{x - x_0} = k\, x_0^{k-1} = f_k'(x_0)$,
donc f_k est dérivable sur $\mathbb{K}$, et pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f_k'(x) = k\, x^{k-1}$. ■

Corollaire 1 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{K}$. De plus,

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{K}, \quad f_k^{(i)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-i+1)\, x^{k-i} & \text{si} \quad i \leqslant k \\ 0 & \text{si} \quad i > k. \end{cases}$$

démonstration : *On procède par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$:*

Initialisation : *Si $k = 0$, alors pour tout élément x de $\mathbb{K}$, $f_0(x) = 1$, et quelque soit l'entier i, on aura nécéssairement $f_0^{(i)}(x) = 0$. Les deux points sont alors vérifiés.*

Hérédité : *Supposons le résultat vrai au rang k et montrons qu'il l'est encore au rang $k+1$. Soit $x \in \mathbb{K}$. D'après la proposition 1, $f_{k+1}'(x) = (k+1)\, x^k$, donc par hypothèse de récurrence, f_{k+1}'*

est $\mathscr{C}^\infty$, et donc a fortiori f_{k+1} aussi. De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{k+1}^{(i)}(x) &= \left(f_{k+1}'(x)\right)^{(i-1)} = (k+1)\, f_k^{(i-1)}(x) \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} \begin{cases} (k+1)k\cdots(k-i+2)\, x^{k-i+1} & \text{si} \quad i-1 \leqslant k \\ 0 & \text{si} \quad i-1 > k \end{cases} \\ &= \begin{cases} (k+1)k\cdots(k+1-i+1)\, x^{k+1-i} & \text{si} \quad i \leqslant k+1 \\ 0 & \text{si} \quad i > k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci achève notre récurrence. ■

Théorème 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, x, \ldots, x^n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$.

démonstration : *Soient $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Supposons que*

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, x^i = 0.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{K}^*$ (on peut se permettre d'enlever 0 puisqu'on veut faire $x \to \infty$),

$$\lambda_n\, x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, x^i \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, x^{i-n}.$$

Or $i - n < 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente,

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\, x^{i-n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = 0.$$

On montre de même que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\lambda_i = 0$. ■

69.2 Fonctions polynômes

Définition 1 : Soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors l'application $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$$

est appelée *fonction polynôme* de la variable x. Les nombres $a_0, \ldots, a_n$ sont appelés *coefficients* de cette fonction polynôme. Si l'on suppose $a_n \neq 0$, alors n est le *degré de* P (noté $\deg(P)$) et a_n est appelé *coefficient dominant de* P.

Notations : On note $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynômes $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ des fonctions polynômes de degré n.

Proposition 2 : Soient $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x^i \in \mathscr{P}_n(\mathbb{K}), g = \sum_{j=1}^{m} b_j\, x^j \in \mathscr{P}_m(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $f+g : x \longmapsto \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k)\, x^k$ **et** $\deg(f+g) \leqslant \max\big(\deg(f), \deg(g)\big)$;

(ii) $\alpha f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k\, x^k$ **et** $\deg(\alpha f) = \deg(f)$;

(iii) $fg : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{(u,v)\in\Delta_k} a_u\, b_v \right) x^k$ **et** $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$,

où $\Delta_k = \{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \mid i+j = k\}$ pour tout entier $k \in \{0,\dots,n+m\}$.

démonstration : *Le seul point à poser quelques problèmes est le (iii). C'est donc logiquement sur celui-ci que nous allons nous attarder ! Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors*

$$\begin{aligned}
(fg)(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{m} b_j\, x^j \right) \\
&= (a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n)(b_0 + b_1\, x + \cdots + b_m\, x^m) \\
&= a_0 b_0 + x[a_0 b_1 + a_1 b_0] + x^2[a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0] + \cdots + x^{n+m}[a_n b_m] \\
&= \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{(u,v)\in\Delta_k} a_u\, b_v \right) x^k.
\end{aligned}$$

De plus, $a_n, b_m \neq 0 \Rightarrow a_n\, b_m \neq 0 \Rightarrow \deg(fg) = n + m = \deg(f) + \deg(g)$. ■

Théorème 2 : Si f est une fonction polynôme, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout entier n, si f est de plus de degré n, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \deg(f^{(k)}) = n - k & \text{si} \quad k \leqslant n \\ f^{(k)} \equiv 0 & \text{si} \quad k > n. \end{cases}$$

démonstration : *$f = \sum a_k\, x^k \in \mathscr{P}(\mathbb{K})$ est une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (corollaire 1), donc est aussi $\mathscr{C}^\infty$. Supposons alors f de degré n. Pour tout entier k et tout $x \in \mathbb{K}$,*

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p (x^p)^{(k)} &= \begin{cases} \sum_{p=k}^{n} a_p\, \frac{p!}{(p-k)!}\, x^{p-k} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{p=0}^{n-k} a_{p+k}\, \frac{(p+k)!}{p!}\, x^{p} & \text{si} \quad k \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad k > n, \end{cases}
\end{aligned}$$

et on en déduit que lorsque $k \leqslant n$, $\deg(f^{(k)}) = n - k$. ■

Proposition 3 : Soit $f \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \operatorname{signe}(a_n) \cdot \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \operatorname{signe}(a_n)(-1)^n \cdot \infty.$$

démonstration *: Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n \quad (a_n \neq 0) \\ &= a_n\, x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\, x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\, x^n}\right)}_{\overset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 1}, \end{aligned}$$

et les deux résultats découlent de cette dernière égalité. ■

Proposition 4 : Soit $a \in \mathbb{K}$. La famille $\big((x-a)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathscr{P}(\mathbb{K})$.

démonstration *: Soient $x \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a simultanément*

$$(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^{n-k}\, x^k \qquad \text{et} \qquad x^n = \big((x-a)+a\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)^{n-k}\, (x-a)^k,$$

ce qui suffit à démontrer le théorème. ■

Théorème 3 (formule de Taylor) : Soient $f \in \mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

démonstration *: $f \in \mathscr{P}_n(\mathbb{K})$, donc d'après la proposition précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{K}$*

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} b_p (x-a)^p.$$

Le théorème 2 et sa démonstration nous permettent d'exhiber la dérivée k-ième de f :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{p=k}^{n} b_p \frac{p!}{(p-k)!} (x-a)^{p-k}.$$

En particulier, pour $x = a$, l'égalité $f^{(k)}(a) = k!\, b_k$ nous donne b_k pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ d'où le résultat, en remplaçant b_k par ce qu'on vient de trouver dans la première égalité. ■

69.3 Racines

Définition 2 : Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une *racine de* f si $f(\alpha) = 0$.

Théorème 4 : Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est racine de f si et seulement si f est divisible par $(x-\alpha)$.

démonstration :
"$\Longleftarrow$" : Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors $f(x) = (x-\alpha)\, g(x)$ par hypothèse, donc $f(\alpha) = 0$.
"$\Longrightarrow$" : Puisque α est racine de f, donc $f(\alpha) = 0$. Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k\, \alpha^k = \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - \alpha^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (x-\alpha) \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^i\, \alpha^{k-1-i} \right) \\ &= (x-\alpha) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i\, \alpha^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Posons $g(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i\, \alpha^{k-1-i}$, qui est un polynôme de degré $n-1$. On a donc bien factorisé $f(x)$ par $(x-\alpha)$. ■

Conséquence : Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Corollaire 2 : Soit f un polynôme de degré n impair. Alors f admet au moins une racine réelle.

démonstration : *D'après la proposition 3, si $a_n > 0$ (resp. < 0), alors $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (resp. $-\infty$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (resp. ∞). Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.* ■

Corollaire 3 : Soient $f \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$. Alors f se factorise en un produit de polynômes de degré un ou deux.

démonstration : *Pour cette démonstration, on s'autorise à faire un petit détour par $\mathbb{C}$. En effet, puisque f est un polynôme à coefficients réels, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$. Si a est lui-même réel, alors f se factorise par $(x-a)$ (théorème 4), sinon $a \neq \overline{a}$ et f se factorise alors par le produit $(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - x(a+\overline{a}) + a\overline{a} = x^2 - 2\Re(a)x + |a|^2$ qui est à coefficients réels. On réitère alors ce procédé au polynôme issu de la factorisation.* ■