LEÇON N° 71 :

Fonctions exponentielles

Pré-requis :
- *Notions de dérivabilité ;*
- *Une fonction dont la dérivée est nulle est constante ;*
- *Théorème de Cauchy-Lipschitz pour l'existence d'une solution d'une équation différentielle.*

71.1 Définitions

Théorème 1 : Soit l'équation différentielle

$$y' = y, \quad \text{avec } y(0) = 1. \tag{71.1}$$

Il en existe une unique solution f dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, f vérifie pour tout réel x :

$$f(-x)\,f(x) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq 0.$$

démonstration *:*
- *Existence : résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz.*
- *Maintenant qu'on sait qu'une telle fonction f existe, montrons qu'elle vérifie les propriétés énoncées. Pour tout réel x, on pose alors $\varphi(x) = f(-x)\,f(x)$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est. Ainsi,*

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) &= -f'(x)\,f(x) + f(-x)\,f'(x) \\ &= -f(-x)\,f(x) + f(-x)\,f(x) \qquad \text{car } f' = f \\ &= 0. \end{aligned}$$

  *Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$. Or $\varphi(0) = f(0)\,f(0) = 1$, car f vérifie (**??**). Par suite,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; f(-x)\,f(x) = 1,$$

  et de là,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) \neq 0.$$

- *Unicité : Supposons que g soit une autre solution de (**??**). Alors g n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, de sorte que l'on puisse définir pour tout réel x la fonction suivante :*

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

  Une méthode analogue à celle utilisée au second point nous amène à écrire que $\psi(x) = 1$ pour tout réel x, c'est-à-dire $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Définition 1 : L'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$ est appelée *fonction exponentielle* et sera notée $\exp$.

71.2 Propriétés algébriques

Théorème 2 : Soient a, b deux réels et n un entier relatif. On a :

(i) $\exp(-a) = \dfrac{1}{\exp(a)}$;

(ii) $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$;

(iii) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$;

(iv) $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

démonstration *:*

(i) Découle du théorème 1.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (rappelons que $\exp(b) \neq 0$ pour n'importe quel réel b)

$$f(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\exp$ l'est, et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\exp'(x+b)}{\exp(b)} = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = f(x).$$

*De plus, $f(0) = \dfrac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$. Par conséquent, f vérifie (**??**) et par unicité de la solution (théorème 1), f coïncide avec $\exp$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x :*

$$f(x) = \frac{\exp(x+b)}{\exp(b)} = \exp(x).$$

Il suffit alors de prendre $x = a$ pour conclure.

(iii) On applique successivement (ii) et (i). En effet, si a et b sont deux réels,

$$\exp(a-b) = \exp(a+(-b)) \overset{\text{(ii)}}{=} \exp(a)\exp(-b) \overset{\text{(i)}}{=} \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

(iv) On applique (i) et (ii) en effectuant une petite récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité est immédiate. Montrons alors l'hérédité : supposons que $\exp(na) = (\exp(a))^n$ et $\exp(-na) = (\exp(a))^{-n}$. Alors

$$\exp((n+1)a) = \exp(na+a) \overset{\text{(ii)}}{=} \exp(na)\exp(a) \overset{\text{H.R.}}{=} (\exp(a))^n \exp(a) = (\exp(a))^{n+1}, \quad \textit{et}$$

$$\exp(-(n+1)a) \overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{\exp(na+a)} = \frac{1}{(\exp(a))^{n+1}} \overset{\text{(i)}}{=} (\exp(a))^{-(n+1)}.$$

Le résultat est ainsi démontré pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

■

`Remarques 1 :`

– $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$.
En effet, $\exp(x) \neq 0$ pour tout réel x ;

– Puisque $\exp = \exp' > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

71.3 Notations

Adoptons la notation suivante :

$$e := \exp(1).$$

Conséquences :

– $\forall\,(x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$ par le théorème précédent. En particulier, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$. Montrons qu'on peut étendre cette notation à l'ensemble $\mathbb{Q}$.

– $\forall\,(x,p,q) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$,

$$\exp\left(q\frac{p}{q}x\right) = \left[\exp\left(\frac{p}{q}x\right)\right]^q$$

$$\overset{\exp>0}{\Leftrightarrow} \quad \exp\left(\frac{p}{q}x\right) = \left[(\exp(x))^p\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\exp(x)\right]^{\frac{p}{q}}.$$

Autrement dit,

$$\forall\,(x,r) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q}, \exp(rx) = (\exp(x))^r.$$

En particulier, pour $x = 1$, on trouve

$$\forall\, r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = (\exp(1))^r = e^r.$$

Montrons qu'on peut encore étendre cette notation à l'ensemble $\mathbb{R}$.

– $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que tout réel y en soit limite. Par continuité de $\exp$, le passage à la limite dans la précédente égalité nous amène directement à

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(xy) = (\exp(x))^y.$$

A nouveau, en faisant $x = 1$, on obtient le résultat recherché, à savoir

$$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exp(y) = (\exp(1))^y = e^y.$$

Avec ces nouvelles notations, on peut énoncer le théorème suivant, en partie identique au théorème 2 :

Théorème 3 : Pour tous réels x et y, on a :

(i) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;

(ii) $e^{x+y} = e^x\, e^y$;

(iii) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;

(iv) $e^{xy} = (e^x)^y$.

Définition 2 : On définit la fonction *logarithme népérien* sur $\mathbb{R}_+^*$, notée $\ln$, la bijection réciproque de la fonction $\exp$.

Définition 3 : On pose, pour un réel a strictement positif, la fonction

$$\begin{aligned} f_a : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{x\ \ln(a)} = a^x. \end{aligned}$$

Elle sera appelée *fonction exponentielle de base* a, et notée $\exp_a$.

`Remarque 2` : Si $a = e$, alors $f_e(x) = e^x$. Ainsi la fonction $\exp$ est la fonction exponentielle de base e. On peut ainsi généraliser le théorème 3, qui est aussi valable pour les fonctions exponentielles de base a, à la simple condition de substituer e par a.

71.4 Equation fonctionnelle

Théorème 4 : Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle est continue et vérifie la relation

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)\, f(y) \tag{71.2}$$

si et seulement si f est une fonction exponentielle de base $a \in \mathbb{R}_+^*$.

démonstration :

"$\Longleftarrow$" : *La fonction* $\exp$ *est dérivable, et satisfait la relation* (**??**) *d'après le théorème 2.*

"$\Longrightarrow$" : *Supposons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et non identiquement nulle vérifie* (**??**).

- *Pour tout x réel,* $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0.$
- *Supposons alors qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$. Alors pour tout réel x, $f(x) = f(x-\alpha+\alpha) = f(x-\alpha)\, f(\alpha) = 0$, ce qui est absurde puisque f n'est pas identiquement nulle. Par suite, $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. De plus, cela implique que $f(0) = (f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 1$.*
- *Posons $a = f(1) > 0$. Il est alors facile de montrer, en se calquant sur la méthode utilisée en 3, que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x.$$

En conclusion, f est donc bien une fonction exponentielle de base a.

$\blacksquare$

71.5 Etude des fonctions exponentielles

Proposition 1 : $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

démonstration : *Posons $g(x) = e^x - x$ pour tout x réel. g est clairement dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

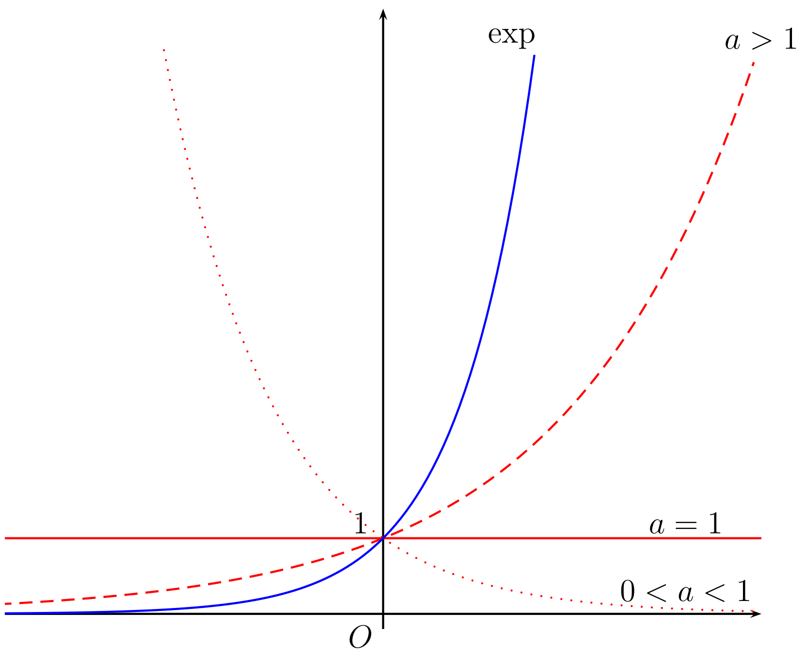
$g'(x) = e^x - 1$. *On dresse alors le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que tout x réel vérifie $e^x > x$. En passant à la limite, on obtient le résultat recherché.

Posons alors $X = -x$, de sorte que X tende vers l'infini. On a alors $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}} = \dfrac{1}{e^X}$. On en déduit la limite recherchée : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{1}{e^X} = 0$, *puisque* $\lim\limits_{X \to \infty} e^X = \infty$. ■

Graphique des fonctions exponentielles



71.6 Divers

– La courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $y = e^x$ admet une tangente T_p en tout point p de $\mathbb{R}$, d'équation

$$y = e^p + e^p(x - p) = e^p(1 + x - p).$$

En particulier, au point $p = 0$, la tangente T_0 a pour équation $y = x + 1$. De plus, T_0 est toujours en-dessous de $(\mathscr{C})$, autrement dit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant x + 1.$$

– Quelques limites. . .

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty \quad ; \quad \lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Solution : Pour la première limite, on procède comme pour la proposition 1. On se donne un réel $A > 0$ et on étudie la fonction $x \longmapsto e^x - Ax$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $\exp$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc il existe un réel $X > 0$ tel que $e^X = AX$, et a fortiori tel que pour tout $x > X$, $e^x > Ax$. On applique ensuite la définition : on a ainsi trouvé

$$\forall\ A > 0, \exists\ X > 0 \mid \forall\ x > X, \quad \frac{e^x}{x} > A \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

On procède de manière analogue pour la seconde limite (le faire en exercice), et pour la troisième, on constate que le quotient est le taux d'accroissement de la fonction $\exp$ en 0. Puisque $\exp$ est dérivable et vérifie $\exp' = \exp$, on en déduit de suite que cette limite vaut $\exp'(0) = e^0 = 1$. $\diamondsuit$