LEÇON N° 79 :

Méthodes d'approximation des zéros d'une fonction numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

Pré-requis :
- *Suites (en particulier adjacentes), inégalité des accroissements finis et théorème des valeurs intermédiaires ;*
- *Formule de Taylor-Lagrange.*

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où $I \subset \mathbb{R}$ est d'intérieur non vide, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, $[a,b] \subset I$ tel que $a < b$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ de sorte que (théorème des valeurs intermédiaires) il existe $x^* \in [a,b]$ tel que $f(x^*) = 0$. Quitte à réduire $[a,b]$, on suppose que x^* est le seul zéro de f sur $[a,b]$.

Dans toute cette leçon, les illustrations se feront sur la fonction $f(x) = e^{x-3} - 4$. **Toutes les interprétations graphiques se trouvent en fin de leçon.**

Problème : Lorsqu'on ne peut pas calculer x^* explicitement, on cherche à en donner une approximation par plusieurs méthodes en exhibant une suite convergeant vers x^*.

79.1 Dichotomie

Principe : On pose $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Si $f(a)f(c) \leqslant 0$, alors $x^* \in [a,c]$, sinon $x^* \in [c,b]$, et on recommence avec l'intervalle plus petit. Cette méthode repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Voir l'illustration en fin de leçon !

Définition 1 : On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) f(a_n) \geqslant 0 \\ a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) f(a_n) < 0. \end{cases}$$

Proposition 1 : Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers x^*. De plus, on a l'inégalité suivante, qui permet de majorer l'erreur :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{a_n + b_n}{2} - x^* \right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} (b - a).$$

démonstration *: (a_n) et (b_n) sont respectivement croissantes et décroissantes par construction, et on a $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (aussi par construction). De plus,*

$$|a_n - b_n| = \frac{1}{2}|a_{n-1} - b_{n-1}| = \cdots = \frac{1}{2^n}|a_0 - b_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant x^* \leqslant b_n$ par construction, elles convergent vers x^* Ensuite,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{a_n + b_n}{2} - x^* \right| \leqslant \frac{1}{2}|a_n - b_n| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|a - b| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}(b - a),$$

qui est le résultat attendu. ■

`Remarque 1` : Cette convergence est assez lente : elle est géométrique, donc d'ordre 1. Elle permet de donner une approximation à $\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)$ près à la n-ième étape.

79.2 Théorème du point fixe et approximations successives

Théorème 1 : Soient $k \in [0, 1[$ un réel et $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si pour tout $x \in]a, b[$, $|g'(x)| \leqslant k$, alors l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $[a, b]$.

De plus, la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers x_0 et cette convergence est contrôlée par l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - x_0| \leqslant k^n (b - a).$$

démonstration *:*

Existence : *$g(a) \geqslant a$ et $g(b) \leqslant b$. Soit alors $h(x) = g(x) - x$. Alors $h(a) \geqslant 0$ et $h(b) \leqslant 0$. Donc h s'annule en un point de $[a, b]$, notée x_0, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.*

Unicité : *Supposons que x_1 soit une autre solution de l'équation $g(x) = x$, distincte de x_0. Par l'inégalité des accroissement finis, $|g(x_0) - g(x_1)| \leqslant k|x_0 - x_1|$, donc $|x_0 - x_1| \leqslant k|x_0 - x_1|$, ce qui équivaut à $k \geqslant 1$. Cette conclusion est absurde, et nous assure alors que $x_1 = x_0$.*

Convergence : $\lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim g(u_n) \overset{g \text{ continue}}{=} g(\lim u_n) \quad \Rightarrow \quad \lim u_n = x_0.$

Inégalité : *On a :*

$$|u_n - x_0| = |g(u_{n-1}) - g(x_0)| \leqslant k|u_{n-1} - x_0| \leqslant \cdots \leqslant k^n|u_0 - x_0| \leqslant k^n(b - a),$$

car $u_0, x_0 \in [a, b]$. ■

Exercice :

(i) Montrer que $x^3 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution s dans $[0, \frac{1}{4}]$.

(ii) Déterminer une suite (u_n) convergeant vers s et donner une majoration de $|u_n - s|$.

Solution :

(i) Posons $g(x) = \frac{1}{4}(1 - x^3)$ et $h(x) = g(x) - x = \frac{1}{4} - \frac{x^3}{4} - x$. La fonction g est clairement continue sur $[0, \frac{1}{4}]$ et dérivable sur $]0, \frac{1}{4}[$ en tant que fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in]0, \frac{1}{4}[$, on a $x^2 \in [0, \frac{1}{16}]$ et

$$|g'(x)| = \left|-\frac{1}{2}x^2\right| = \frac{1}{2}x^2 \leqslant \frac{1}{32} \in [0, 1[.$$

Le théorème précédent permet d'affirmer que l'équation $g(x) = x$, ou encore $x^3 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$, que nous noterons dans la suite s.

(ii) On définit une suite (u_n) par $u_0 = \frac{1}{8} \in [0, \frac{1}{4}]$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Toujours d'après le théorème précédent, cette suite (u_n) converge vers s, et cette convergence est contrôlée par l'inégalité

$$|u_n - s| \leqslant k^n(b - a) = \frac{1}{32^n}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{2^{2+5n}}.$$

Pour information, nous avons donc respectivement $|u_1 - s| \leqslant 0,008$, $|u_2 - s| \leqslant 0,0003$, $|u_3 - s| \leqslant 8 \times 10^{-6}$, $|u_4 - s| \leqslant 3 \times 10^{-7}$ et $|u_5 - s| \leqslant 8 \times 10^{-9}\ldots$ ◊

Méthode d'ajustement linéaire

Principe : Soit $x_0 \in [a, b]$. Soient $\mathscr{D}_n$ les droites de pentes m fixé passant par les points $C_n\big(x_n, f(x_n)\big)$, où x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{D}_n$ et de l'axe des abscisses ($n \in \mathbb{N}$). Voir l'illustration en fin de leçon !

Proposition 2 : On suppose $f'(x^*) \neq 0$. Il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{f'(x^*)}{m} \leqslant \frac{3}{2},$$

et α, β tels que $f(\alpha)f(\beta) < 0$. La suite (x_n) est bien définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$ et converge vers x^*.

démonstration : *m existe car $\mathbb{R}$ est archimédien. D'où $\left|1 - \frac{f'(x^*)}{m}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ nous amène à l'existence de $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $x \in I$ vérifiant $|x - x^*| \leqslant \eta$, on a*

$$\left|1 - \frac{f'(x)}{m}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soient alors $\eta' = \min(\eta, x^* - a, b - x^*)$ et $\alpha = x^* - \eta'$, $\beta = x^* + \eta'$. On a alors bien que $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

On montre facilement que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathscr{D}_n$ est d'équation $y = mx + f(x_n) - mx_n$. Donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}$. Enfin, l'inégalité des accroissements finis nous assure que

$$|x_n - x^*| \leqslant \varepsilon|x_{n-1} - x^*| \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon^n|x_0 - x^*| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(car $0 < \varepsilon < 1$), donc $\lim x_n = x^*$. ■

`Remarques 2` :

– Dans la pratique, on ne connaît pas $f'(x^*)$. On cherche une valeur de m proche de $f'(x^*)$.

– Pour fixer les idées, supposons f croissante et convexe (comme sur l'illustration en fin de leçon). Puisque m doit être proche de $f'(x^*)$, on peut choisir $m > 0$. On sait que la monotonie de la suite (x_n) dépend du signe de $g'(x^*)$, où $g(x) = x - \frac{f(x)}{m}$. Or, on a $g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)}{m}$, et donc $g'(x^*) > 0 \Leftrightarrow m > f'(x^*)$ et $g'(x^*) < 0 \Leftrightarrow m < f'(x^*)$.

Par suite, (x_n) aura donc un comportement "en escalier" si la pente m est plus grande que celle de la tangente en x^* et un comportement "en escargot" sinon.

Dans toute la suite, f'' est de signe constant sur I et on suppose que $f(a)f''(a) < 0$ (quitte à inverser les rôles de a et b).

Méthode de Lagrange (on suppose $f'f'' > 0$ sur I)

Principe : Définir les droites passant par les points $B\big(b, f(b)\big)$ et $A_n\big(a_n, f(a_n)\big)$, où $a_0 = a$ et a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection du segment $[A_nB]$ avec l'axe des abscisses (pour tout $n \in \mathbb{N}$). Voir l'illustration en fin de leçon !

Théorème 3 : La suite (a_n) est définie par $a_0 = a$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n f(b) - b f(a_n)}{f(b) - f(a_n)}$.

Elle est croissante, majorée par x^* et converge vers x^*. De plus, si l'on suppose $f'(a)f''(a) > 0$, alors

$$0 \leqslant x^* - a_{n+1} \leqslant (x^* - a_n)(b - a)\frac{M_2}{m_1},$$

où $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''|$ et $m_1 = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$.

démonstration *: On a :*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n f(b) - b f(a_n)}{f(b) - f(a_n)} - a_n = \frac{a_n f(a_n) - b f(a_n)}{f(b) - f(a_n)} = -f(a_n)\,\frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}.$$

Or $f(a_n)$ et $\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)}$ sont de signes contraires lorsque $f'f'' > 0$. En effet, on peut supposer (quitte à échanger les rôles de a et b) que la condition $f'f'' > 0$ entraîne $f' > 0$ et $f'' > 0$, c'est-à-dire f croissante et convexe. Puisqu'une corde est toujours au-dessus de la représentation graphique d'une fonction convexe, il vient que $a_n \leqslant x^*$, donc $f(a_n) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b$ implique aussi $f(a_n) \leqslant f(b)$, d'où $\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} \geqslant 0$. En revenant à la première égalité, on en déduit finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.

Par construction, $a_n \leqslant x^*$ et x^* est un point fixe de $x \mapsto \dfrac{xf(b) - bf(x)}{f(b) - f(x)}$, donc (a_n) converge vers x^*.

De plus, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{\frac{f(b)-f(a_n)}{b-a_n}} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(\eta_n)}$, pour $\eta_n \in \,]a, b[$ (théorème des accroissements finis).

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
& x^* - a_{n+1} = x^* - a_n + \frac{f(a_n)}{f'(\eta_n)} - \frac{\overbrace{f(x^*)}^{=0}}{f'(\eta_n)} \\
& x^* - a_{n+1} = (x^* - a_n)\left(1 - \frac{f'(\theta_n)}{f'(\eta_n)}\right) \qquad \text{avec } \theta \in]a,b[\text{ (théorème des accroissements finis)} \\
& x^* - a_{n+1} = (x^* - a_n)\left(\frac{f'(\eta_n) - f'(\theta_n)}{\eta_n - \theta_n}\,\frac{\eta_n - \theta_n}{f'(\eta_n)}\right) \\
& x^* - a_{n+1} = (x^* - a_n)(\eta_n - \theta_n)\frac{f''(\xi_n)}{f'(\eta_n)} \qquad \text{avec } \xi_n \in]a,b[\\
\Rightarrow \quad & |x^* - a_{n+1}| = |x^* - a_n||\eta_n - \theta_n|\frac{|f''(\xi_n)|}{|f'(\eta_n)|} \leqslant |x^* - a_n||b-a|\frac{M_2}{m_1} \\
\Rightarrow \quad & x^* - a_{n+1} \leqslant (x^* - a_n)(b-a)\frac{M_2}{m_1}.
\end{aligned}
$$

Le résultat est ainsi démontré. ■

`Remarque 3` : On arrive par récurrence à montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x^* - a_n| = \left((b-a)\frac{M_2}{m_1}\right)^n |x^* - a|$.

La convergence est donc aussi d'ordre 1, c'est-à-dire géométrique.

79.3 Méthode de Newton (on suppose $f'f'' > 0$ sur I)

Principe : Définir les droites tangentes au point $(x_n, f(x_n))$, où $x_0 = b$ et x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente en $(x_n, f(x_n))$ et de l'axe des abscisses. Voir la figure en fin de leçon !

Théorème 3 : La suite (x_n) est définie par $x_0 = b$ et $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Elle est décroissante, minorée par x^* et converge vers x^*. De plus, en posant $q = \dfrac{M_2}{2m_1}$, où $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |f''|$ et $m_1 = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x^* - x_n| \leqslant \frac{1}{q}\left(q|x^* - x_0|\right)^{2^n}.$$

démonstration : *La tangente en $(x_n, f(x_n))$ est d'équation $y(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, d'où*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{et} \quad x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Or $f'f'' > 0$ sur I implique que ff' est croissante sur I, et puisque $f(x^*) = 0$, on a $ff' \geqslant 0$ sur $[x^*, b]$. Par conséquent, f' et f sont de même signe sur cet intervalle, et on en déduit que $x_{n+1} - x_n < 0$. En effet, par construction, $x_n \geqslant x^*$ ($\forall\, n$). Enfin, x^* étant un point fixe, on a nécessairement $\lim x_n = x^*$.

De plus, on a (la deuxième ligne ci-dessous est obtenue par application à f au point x^* de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur $[x^*, x_n]$, et en l'appliquant dans la foulée à $x = x_n$), pour $\varepsilon_n \in$

$]x^*, x_n[$:

$$\begin{aligned}
|x^* - x_{n+1}| &= \left| x^* - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = \left| x^* - x_n + \frac{f(x_n) - \overbrace{f(x^*)}^{=0}}{f'(x_n)} \right| \\
&= \left| x^* - x_n + \frac{f(x_n) - f(x_n) - (x^* - x_n) f'(x_n) - \frac{(x^*-x_n)^2}{2} f''(\varepsilon_n)}{f'(x_n)} \right| \\
&= \left| x^* - x_n - (x^* - x_n) - \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\varepsilon_n)}{f'(x_n)} \right| \\
&= |x^* - x_n|^2 \frac{|f''(\varepsilon_n)|}{2|f'(x_n)|} \leqslant |x^* - x_n| \frac{M_2}{2m_1} = |x^* - x_n|^2 \; q.
\end{aligned}$$

Finalement, on a par récurrence :

$$|x^* - x_n| \leqslant |x^* - x_0|^{2^n} \; q^{2^n - 1} = \frac{1}{q}\big(q|x^* - x_0|\big)^{2^n},$$

ce qui achève notre démonstration. ■

Remarques 3 :

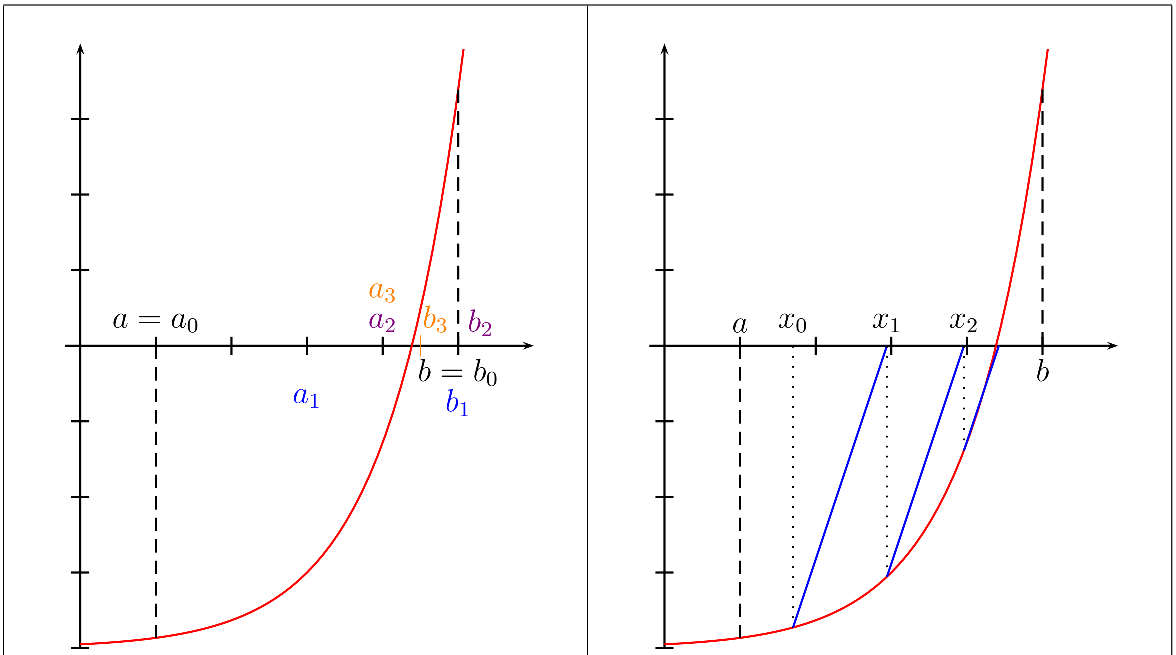
- La convergence est contrôlée par le nombre k défini par $k = \frac{M_2}{2m_1} |x^* - x_0|$, mais rien ne prouve que $k < 1$. Si jamais $M_2/2m_1$ est trop "grand", il faut choisir un bon x_0 pour que la méthode soit efficace.
- On peut montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |x^* - x_n| \leqslant q^n \, |b - x^*|^2.$$

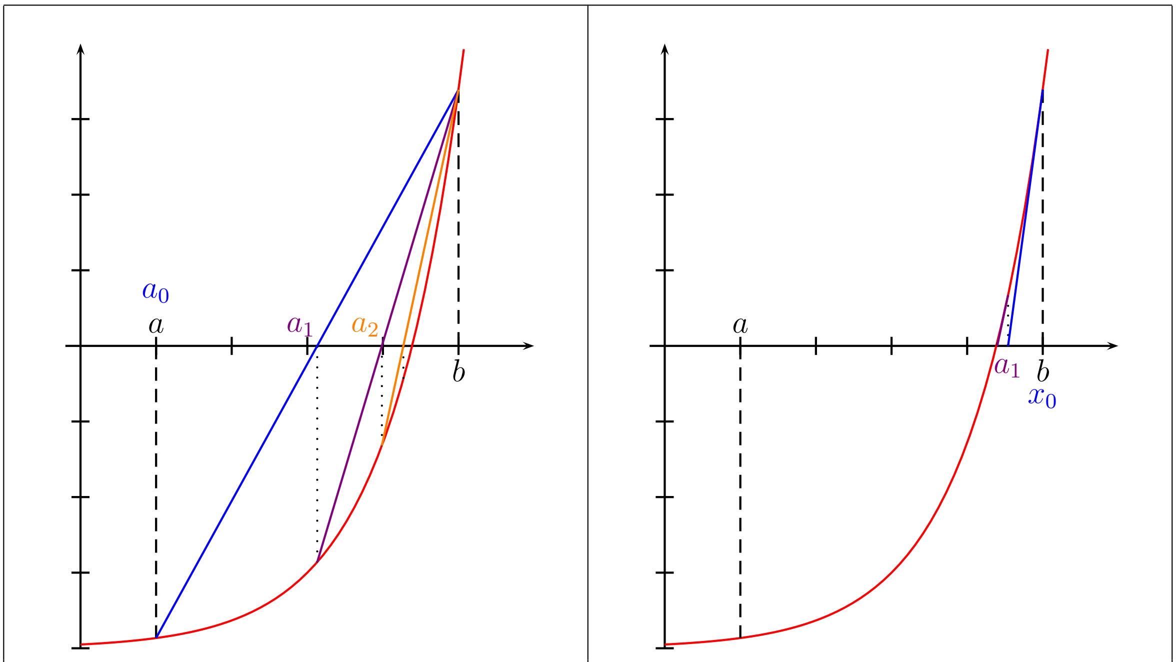
La convergence de cette méthode est donc d'ordre 2, on dit alors qu'elle est quadratique.

79.4 Exemples

On considère la fonction $f(x) = e^{x-3} - 4$ définie sur l'intervalle $[1, 5]$. On cherche à trouver une valeur approchée à 10^{-5} près du nombre x^* vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$. Voici les illustrations correspondant aux différentes méthodes :



Méthode par dichotomie — Méthode d'ajustement linéaire

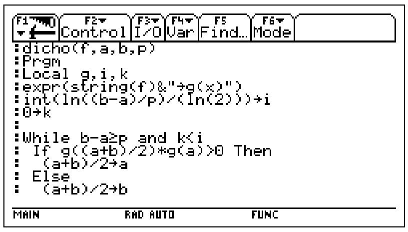


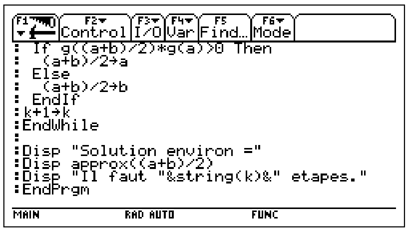
Méthode de Lagrange — Méthode de Newton

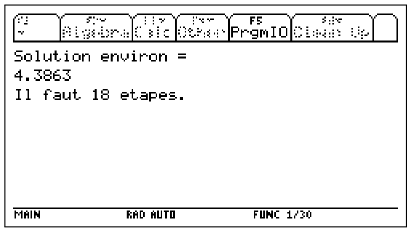
(i) Avec la méthode par dichotomie, on a :

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{4}{2^{n+1}} \leqslant \frac{1}{100000} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 400000 \Rightarrow n \geqslant \frac{\ln(400000)}{\ln(2)} - 1 \approx 17,61.$$

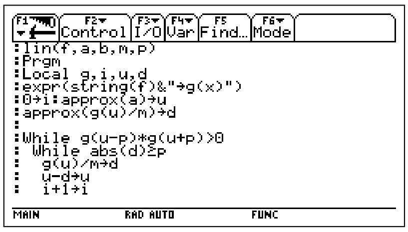
Il faudra donc 18 étapes pour atteindre la précision demandée, et on trouve alors $x^* \approx 4,38630$:

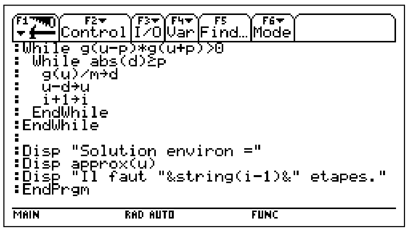


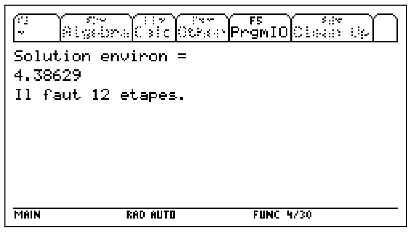




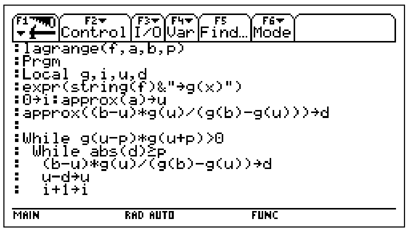
(ii) Avec la méthode d'ajustement linéaire, on utilise simplement la relation $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/m$ que l'on applique jusqu'à ce que $|x^* - x_n| \leqslant 10^{-5}$. La calculatrice nous annonce alors 12 étapes pour atteindre la précision demandée, et trouve $x^* \approx 4,38629$:

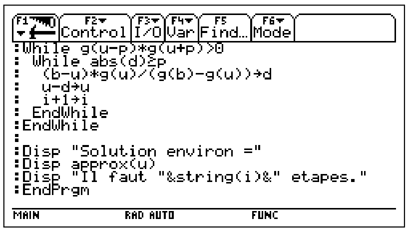


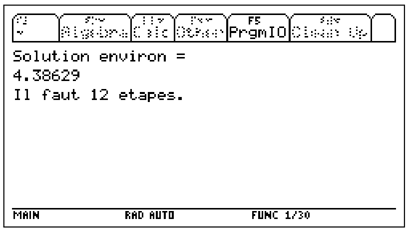




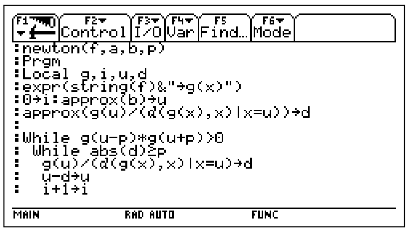
(iii) Avec la méthode de Lagrange, il faudrait entrer manuellement le nombre d'étapes pour trouver une valeur approchée. Ceci est dû à l'absence d'un test d'arrêt. Sur la calculatrice, on peut détourner cette difficulté, et il faudra donc 12 étapes pour atteindre la précision demandée, trouvant alors $x^* \approx 4,38629$:

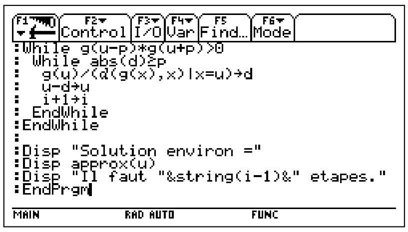


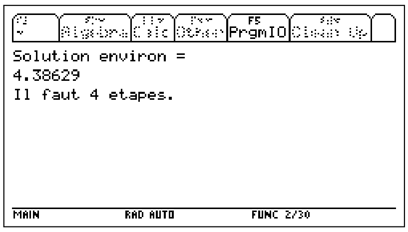




(iv) Avec la méthode de Lagrange, il faudrait entrer manuellement le nombre d'étapes pour trouver une valeur approchée. Ceci est dû à l'absence d'un test d'arrêt. Sur la calculatrice, on peut détourner cette difficulté, et il faudra donc 4 étapes pour atteindre la précision demandée, trouvant alors $x^* \approx 4,38629$:







`Remarque 4` : Les méthodes d'ajustement linéaire, de Lagrange et de Newton utilisent toutes une formule général :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)},$$

où φ est une fonction propre à chacune. C'est cette forme qui nous a permis de construire les programmes sur la calculatrice.

Exercice : Rechercher des valeurs approchées à 10^{-3} près des zéros des fonctions

$$f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x} \qquad ; \qquad g(x) = x^2 - \ln(1+x) \qquad ; \qquad h(x) = \cos x - x\,e^x.$$

<u>**Solution**</u> : Il suffit de reprendre les programmes ci-dessus. On trouve :

Méthode	Valeurs approchées			Nombre d'étapes		
Fonction	f	g	h	f	g	h
Dichotomie	1,35034	0,74707	0,518555	11	8	9
Ajustement linéaire	1,35002	0,74644	0,517639	7	29	6
Lagrange	1,34974	0,74659	0,517554	9	4	3
Newton	1,34998	0,746882	0,517757	4	3	3

Coefficients m choisis pour la méthode d'ajustement linéaire, après avoir tracé la représentation de la fonction et estimé le nombre $f'(x^*)$: $m = 1$ pour f, $m = 0,5$ pour g et $m = -4$ pour h.

Précisons tout de même que les valeurs approchées données par Maple (à 10^{-9} près) donnent :

$$f(1,349976485) \approx 0 \qquad ; \qquad g(0,7468817423) \approx 0 \qquad \text{et} \qquad h(0,5177573637) \approx 0.$$

On constate ainsi que, même si cela n'a pas été demandé, seule la méthode de Newton a été capable de fournir les bonnes valeurs approchées 10^{-5} près, et en un temps record ! C'est donc la méthode simple la plus rapide pour obtenir une telle valeur approchée.