

## Notations et définitions

- Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 1. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^p$ , on note  $C_\Omega$  l'espace vectoriel des fonctions de  $\Omega$  dans  $\mathbf{R}$  qui sont de classe  $C^\infty$ .
- Dans tout le problème, on appellera *difféomorphisme* entre deux ouverts de  $\mathbf{R}^p$  une bijection entre ces deux ouverts qui est de classe  $C^\infty$  ainsi que sa réciproque.
- Si  $I$  est un intervalle on note  $I^2$  le carré  $I \times I$  de  $\mathbf{R}^2$ .
- Soit  $I$  un intervalle et  $f$  un élément de  $C_I$ . On dit que  $x_0 \in I$  est un *point critique* de  $f$  si  $f'(x_0) = 0$ . Une *valeur critique* de  $f$  est un réel de la forme  $f(x_0)$  où  $x_0$  est un point critique. On dit qu'un point critique  $x_0$  est *non dégénéré* si  $f''(x_0)$  est non nul.
- Si  $A$  et  $B$  sont deux parties du plan  $\mathbf{R}^2$  on dira que  $A$  et  $B$  sont *de même type* s'il existe deux intervalles ouverts  $I$  et  $J$  et un difféomorphisme  $\phi$  de  $I^2$  sur  $J^2$  tels que :

$$A \subset I^2, \quad B \subset J^2, \quad \phi(A) = B$$

## Objet du problème

Soit  $I$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbf{R}$ . Pour toute fonction  $f$  élément de  $C_I$ , et pour tout réel  $\lambda$  on définit la partie de  $\mathbf{R}^2$  :

$$E_\lambda(f) = \{(x, y) \in I^2, f(x) + f(y) = \lambda\}$$

Le problème se propose d'étudier quelques propriétés des ensembles  $E_\lambda(f)$ .

## I. Préliminaires et exemples

### I.A. Généralités

1. Soit  $I$  un intervalle ouvert quelconque de  $\mathbf{R}$ , et  $f$  un élément de  $C_I$ .
  - (a) Déterminer  $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$  (pour  $\lambda, \mu$  distincts) et  $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} E_\lambda(f)$ .
  - (b) Démontrer que pour tout  $\lambda$ ,  $E_\lambda(f)$  est un fermé de  $I^2$ , et trouver une symétrie commune à tous les  $E_\lambda(f)$ .
  - (c) Soit  $x_0 \neq 0$ . On pose  $g(x) = f(x + x_0)$ . Préciser l'intervalle de définition de  $g$ . Quelle transformation géométrique envoie  $E_\lambda(g)$  sur  $E_\lambda(f)$  ?
2. Déterminer selon la valeur de  $\lambda$ , l'ensemble  $E_\lambda(f)$  lorsque la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x^2$ .
3. On prend dans cette question la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x - x^3$ . Démontrer que  $E_0(f)$  est la réunion d'une droite et d'une ellipse.
4. On prend dans cette question la fonction  $f$  définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(x) = x^2 - x^3$ . Démontrer que  $E_0(f)$  est la réunion du point  $(0, 0)$  et d'une courbe dont on donnera une équation polaire et qu'on tracera sommairement, par exemple à l'aide d'une calculatrice graphique.

### I.B. Racine carrée d'une fonction positive

5. Dans cette question, on note  $I = ]a, b[$  un intervalle contenant 0 ( $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$ ). On suppose de plus que la fonction  $f \in C_I$  vérifie l'hypothèse suivante :
  - (H) 0 est l'unique point critique de  $f$  et il est non dégénéré ; on a  $f(0) = 0$  et  $f''(0) > 0$ .
  - (a) Expliciter les variations de  $f$ .

(b) On pose  $g(x) = \int_0^1 (1-u)f''(xu)du$ .

Établir l'égalité  $f(x) = x^2g(x)$ .

(c) Démontrer que  $g$  est de classe  $C^\infty$  et strictement positive sur  $]a, b[$ .

(d) Construire une fonction  $h$  croissante et de classe  $C^\infty$  sur  $I$  telle que pour tout  $x$  on ait  $f(x) = h(x)^2$ . Justifier que  $h$  est un difféomorphisme de  $I$  sur un intervalle  $J$  qu'on précisera en fonction de  $f$ .

*Définition* : la fonction  $h$  ainsi définie sera appelée racine carrée de  $f$ .

## I.C. Ovals du plan

On reprend les notations de la question 5. en supposant toujours que  $f$  vérifie l'hypothèse (H).

6. En utilisant la racine carrée de  $f$ , démontrer que pour  $\lambda > 0$  l'ensemble  $E_\lambda(f)$  est de même type que l'intersection du cercle d'équation  $x^2 + y^2 = \lambda$  et du carré  $J^2$ .

*Définition* : dans la suite du problème, on appellera **ovale** toute partie du plan qui est de même type qu'un cercle.

### 7. Une application

On considère le système différentiel (S) suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -y(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  sont deux fonctions inconnues de la variable  $t$ . Soit  $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, (x_0, y_0) \neq (1, 1)$ .

On note :  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  l'unique solution maximale de (S) vérifiant  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ .

(a) Établir que les fonctions  $x$  et  $y$  ne peuvent pas s'annuler.

(b) Démontrer que le support de l'arc paramétré  $t \mapsto (x(t), y(t))$  est inclus dans un ovale que l'on caractérisera à l'aide de  $x_0, y_0$  et de la fonction  $g$  définie pour  $x > 0$  par  $g(x) = x - 1 - \ln(x)$ .

## II. Un problème de dénombrement

On rappelle le résultat suivant : si  $z \rightarrow g(z)$  est une fonction d'une variable complexe holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $r$ , alors elle est somme sur ce disque ouvert d'une série entière convergente.

1. On pose, pour tout  $z \in \mathbf{C}$ ,  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  et  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

(a) Résoudre l'équation  $\cos(z) = 0$ .

(b) Établir l'existence d'une suite  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de nombres réels tels que pour tout complexe  $z$  de module assez petit on ait :

$$\frac{\sin(z) + 1}{\cos(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

(il n'est pas demandé de calculer les coefficients  $b_n$ ).

(c) Démontrer que la fonction  $H$  définie sur  $\mathbf{C} \setminus \{z, \cos(z) = 0\}$  par  $H(z) = \frac{\sin(z) + 1}{\cos(z)} + \frac{4}{2z - \pi}$  possède un prolongement holomorphe sur le disque ouvert  $\left\{z, |z| < \frac{3\pi}{2}\right\}$ .

(d) En déduire que  $b_n \sim \frac{2^{n+2}n!}{\pi^{n+1}}$ .

## 2. Permutations alternantes

On donne  $a_0, \dots, a_{n-1}$ ,  $n$  nombres réels distincts rangés par ordre croissant :  $a_0 < \dots < a_{n-1}$ . Soit  $\sigma$  une permutation de l'ensemble  $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ . On dit que  $\sigma$  est *alternante* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma(a_{2i}) &< \sigma(a_{2i+1}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i + 1 \leq n - 1 \\ \sigma(a_{2i-1}) &> \sigma(a_{2i}) \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 < 2i \leq n - 1 \end{aligned}$$

On dit que  $\sigma$  est *antialternante* si elle vérifie les inégalités inverses. On note  $e_n$  le nombre de permutations alternantes (par convention  $e_0 = e_1 = 1$ ).

- Déterminer toutes les permutations alternantes ainsi que l'entier  $e_n$  lorsque  $n = 2, 3$  ou  $4$ .
- Démontrer qu'il y a (pour  $n \geq 2$ ) autant de permutations alternantes que de permutations antialternantes.
- Démontrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :

$$2e_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e_i e_{n-i}$$

*Indication* : pour une permutation  $\sigma$  de  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , on pourra considérer l'indice  $j$  tel que  $\sigma(a_j) = a_0$ .

- En conclure que pour tout  $n$ ,  $e_n = b_n$ .

## III. Les serpents d'Arnold

Dans cette partie,  $I = \mathbf{R}$ .

On se propose d'étudier la topologie de  $E_\lambda(f)$  pour une famille de fonctions appelées *serpents d'Arnold*. Un entier  $n > 0$  étant donné, on fixe  $n$  réels  $a_0 < \dots < a_{n-1}$  tels que les sommes  $a_i + a_j$  pour  $i \leq j$  soient toutes distinctes.

On note  $\mathcal{A}_n$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathbf{R}$  dans lui même qui vérifient les propriétés suivantes :

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ;
- $f$  possède exactement  $n$  points critiques,  $x_0(f) < \dots < x_{n-1}(f)$  et ils sont tous non dégénérés ;
- Les valeurs critiques de  $f$  sont  $a_0, \dots, a_{n-1}$ .  
Autrement dit, il existe une permutation  $\sigma_f$  de  $a_0, \dots, a_{n-1}$  telle que, pour tout  $i$ ,  $f(x_i(f)) = \sigma_f(a_i)$ .  
La permutation  $\sigma_f$  s'appelle permutation associée à  $f$  ;
- $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  ;
- $f(x)$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

*Définition* : un élément  $f$  de  $\mathcal{A}_n$  s'appelle un *serpent à  $n$  points critiques*.

*Remarque* : pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note  $x_0, \dots, x_{n-1}$  les points critiques de  $f$ . De même, la notation  $\mathcal{A}_n$  est en réalité une abréviation pour  $\mathcal{A}_n(a_0, \dots, a_{n-1})$ .

### Classes d'équivalence de serpents

- Soit  $f \in \mathcal{A}_n$ . Préciser les variations de  $f$  selon la parité de  $n$ .
- Démontrer que la relation  $\sim$  définie par «  $f \sim g$  si et seulement s'il existe un difféomorphisme croissant  $h$  de  $\mathbf{R}$  tel que  $f = g \circ h$  » est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{A}_n$ .
  - Démontrer que si  $f \sim g$  alors pour tout  $\lambda$ ,  $E_\lambda(f)$  et  $E_\lambda(g)$  sont de même type.
- Soit  $h$  un difféomorphisme croissant de  $\mathbf{R}$ . Démontrer que  $f \in \mathcal{A}_n \Leftrightarrow f \circ h \in \mathcal{A}_n$ , et qu'alors  $\sigma_f = \sigma_{f \circ h}$ .

4. Réciproquement on suppose que  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $\mathcal{A}_n$  qui vérifient  $\sigma_f = \sigma_g$ .
  - (a) Démontrer qu'il existe une unique bijection  $h$  croissante de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  telle que  $f = g \circ h$  et  $h(x_k(f)) = x_k(g)$ .
  - (b) En utilisant la partie I, démontrer que  $h$  est un difféomorphisme.
5. (a) Démontrer que le nombre de classes d'équivalence de  $\sim$  est majoré par l'entier  $b_n$  défini dans la partie II.
  - (b) On admet que si  $[\lambda, \mu]$  ne contient aucun élément  $a_i + a_j$ , les ensembles  $E_\lambda(f)$  et  $E_\mu(f)$  sont de même type. En déduire un majorant du nombre de types des  $E_\lambda(f)$ , lorsque  $\lambda$  parcourt  $\mathbf{R}$  et  $f$  parcourt  $\mathcal{A}_n$ .

### Topologie de $E_\lambda(f)$ dans le cas non critique

On se propose dans les questions qui suivent de décrire la topologie de  $E_\lambda(f)$  lorsque  $f$  est un élément de  $\mathcal{A}_n$  et que le réel  $\lambda$  n'est pas de la forme  $a_i + a_j$ .

On note  $I_0 = ]-\infty, x_0]$ ,  $I_n = [x_{n-1}, \infty[$ , et pour  $k$  variant de 1 à  $n-1$ ,  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ .

6. Sous-graphes
  - (a) Vérifier que  $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$  est, pour tout  $(i, j)$ , l'ensemble vide ou le graphe d'une fonction strictement monotone continue définie sur un intervalle fermé inclus dans  $I_i$ .

**Définition :** lorsque l'intersection  $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$  est non vide, on convient de l'appeler un **sous-graphe** de  $E_\lambda(f)$ .

- (b) Démontrer que les extrémités du sous-graphe  $E_\lambda(f) \cap (I_i \times I_j)$  sont sur la frontière du rectangle  $I_i \times I_j$ .
  - (c) Démontrer que chaque extrémité d'un sous-graphe appartient à exactement un autre sous-graphe et que deux sous-graphes ne peuvent avoir d'autre point commun qu'une extrémité.
  - (d) Démontrer que, si  $n$  est impair, tous les sous-graphes sont bornés et que si  $n$  est pair il y en a exactement 2 qui sont non bornés.
7. Composantes connexes de  $E_\lambda(f)$ 
    - (a) Démontrer que toute composante connexe est une union  $\bigcup_{i=1}^p S_i$  de sous-graphes tels que  $S_i$  et  $S_{i+1}$  (pour  $i$  variant de 1 à  $p-1$ ) ont une extrémité commune.
    - (b) En déduire que lorsque  $n$  est pair il y a exactement une composante connexe non bornée.
    - (c) Lorsque  $C$  est une composante connexe bornée, construire une bijection continue du cercle unité  $S^1$  sur  $C$ .

On peut alors démontrer, mais nous ne le ferons pas, que  $C$  est un ovale.

8. Démontrer que le nombre d'ovales est inférieur ou égal à  $[\frac{n+1}{2}]^2$  (où  $[\cdot]$  désigne la partie entière).
9. Dans cette question on choisit  $n = 2$ .
  - (a) Illustrer le fait que les composantes ne sont pas forcément des ovales lorsque  $\lambda$  est l'un des  $a_i + a_j$ .
  - (b) Démontrer qu'il y a au maximum 4 ensembles  $E_\lambda(f)$  de types différents quand  $\lambda$  décrit  $\mathbf{R}$ .

## IV. Réalisation polynomiale des serpents

On garde les notations de la partie précédente. L'entier  $n$  est supposé supérieur ou égal à 2. On souhaite démontrer le théorème **(T)** suivant, dû au mathématicien René Thom :

**(T)** Pour toute  $f \in \mathcal{A}_n$  il existe un polynôme  $P$  de degré  $n+1$  tel que  $f \sim P$ .

Il en résulte que les différents ensembles  $E_\lambda(f)$  vus ci-dessus sont tous de même type qu'une courbe algébrique.

## Notations

On note  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  les deux ouverts de  $\mathbf{R}^{n-1}$  définis par :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}\}, \\ \Omega_2 &= \{(y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, 0 < y_1, \text{ et pour tout } i > 0, y_{2i-1} > y_{2i} \text{ et } y_{2i} < y_{2i+1}\}.\end{aligned}$$

Si  $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$  est un élément de  $\Omega_1$ , on note  $P_x$  le polynôme de degré  $n$  défini par

$$P_x(t) = t(x_1 - t) \cdots (x_{n-1} - t)$$

Enfin, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , on définit un polynôme  $Q_{i,x}$  en posant  $Q_{i,x}(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{P_x(u)}{x_i - u} du$ .

## A. Deux lemmes de topologie et un d'algèbre

1. Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts connexes de  $\mathbf{R}^{n-1}$  et  $\phi$  une application continue de  $U$  dans  $V$ . On fait les deux hypothèses suivantes :

**H1** : l'image par  $\phi$  de tout ouvert de  $U$  est un ouvert de  $V$  ;

**H2** : l'image réciproque par  $\phi$  de tout compact de  $V$  est un compact de  $U$ .

Démontrer que  $\phi$  est surjective.

2. Soit  $E_n$  l'ensemble des polynômes unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) de degré  $n$  à coefficients réels. Démontrer que  $\inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt$  est un réel **strictement** positif.

Dans la suite, on notera  $C = \inf_{P \in E_n} \int_0^1 |P(t)| dt$ .

3. Soient  $R_1, \dots, R_{n-1}, n-1$  polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-2$ , linéairement indépendants et  $(t_1, \dots, t_{n-1}), n-1$  réels distincts. Démontrer que le déterminant  $\det(R_i(t_j))$  est non nul.

## B. Le théorème (T)

Soit  $\Phi$  l'application :

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\rightarrow \Omega_2 \\ x &\mapsto \left( \int_0^{x_1} P_x(t) dt, \dots, \int_0^{x_{n-1}} P_x(t) dt \right)\end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, le vecteur  $\Phi(x)$  sera noté  $(y_1, \dots, y_{n-1})$ .

4. Justifier que cette application est bien définie, exprimer ses dérivées partielles en fonction des polynômes  $Q_{i,x}$  et en déduire que  $\Phi$  vérifie l'hypothèse **H1**.
5. Pour  $x \in \Omega_1$  démontrer l'inégalité :

$$\left| y_1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i (y_{i+1} - y_i) \right| \geq C(x_{n-1})^{n+1}.$$

6. Démontrer que  $\Phi$  vérifie l'hypothèse **H2** et en déduire le théorème **(T)**.