LEÇON N° 3 :

Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.

Pré-requis :
- *Cardinal d'un ensemble fini, arrangements ;*
- *Raisonnement par récurrence.*

3.1 Définitions et propriétés

Définition 1 : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle *combinaison* de $p \in \mathbb{N}$ éléments de E toute partie de E à p éléments. On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments d'une ensemble en contenant n (il se lit « p parmi n »). Les coefficients $\binom{n}{p}$ sont appelés *coefficients binomiaux*.

Remarques 1 :
- $\varnothing$ est la seule partie de E à 0 éléments, donc $\binom{n}{0} = 1$,
  E est la seule partie de E à n éléments, donc $\binom{n}{n} = 1$;
- $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ par définition ;
- Si $p > n$, il ne peut y avoir de parties de p éléments d'un ensemble en contenant n, donc si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.

Théorème 1 : Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

***démonstration** : Les nombre d'ensembles ordonnés de p éléments d'un ensemble à n éléments est A_n^p. Or il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir une partie à p éléments dans un ensemble à n éléments, et $p!$ manières d'ordonner les éléments dans chaque parties. Par le principe multiplicatif, on a donc l'égalité $A_n^p = p!\binom{n}{p}$, d'où le résultat, sachant que $A_n^p = n!/(n-p)!$.* ■

Conséquences : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Proposition 1 (formule de Pascal) :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

démonstration : *Soit un ensemble E à n éléments. On suppose que l'on a « extrait » une partie à p éléments. Si l'on retire un élément $\{a\}$ à E, c'est soit un élément de la combinaison, soit non. Dans le premier cas, les $p-1$ éléments restants forment une partie de l'ensemble $E\backslash\{a\}$ de cardinal $n-1$, et dans le second, ce sont les p éléments qui forment une partie de $E\backslash\{a\}$. Cette union étant disjointe, les cardinaux s'ajoutent pour aboutir à l'égalité demandée.* ■

Triangle de Pascal :

$n\backslash p$	0	1	2	3	$\cdots$
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Corollaire 1 (formule itérée de Pascal) : Soit $p \leqslant n$ deux entiers naturels. Alors

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

démonstration : *On effectue une récurrence sur l'entier n.*

- **Initialisation :** *Lorsque $n = p$, les deux membres valent 1 d'après la remarque 1.*
- **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:*

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \overset{\text{H.R.}}{=} \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

La dernière égalité étant justifiée par la formule de Pascal. ■

3.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 2 (formule du binôme) : Soit A un anneau, a, b deux éléments de A qui commutent. Alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

`Remarque 2` : Les coefficients binomiaux tirent leur appellation de cette formule.

démonstration *: Par récurrence sur l'entier n.*

- **Initialisation :** *Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).*
- **Hérédité :** *Supposons la formule vraie au rang n, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$:*

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \overset{H.R.}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{k+1}\,b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\,a^k\,b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \underbrace{a^{n+1}}_{(k=n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\,a^k\,b^{n-k+1} + \underbrace{b^{n+1}}_{(k=0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,a^k\,b^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{0}\,a^0\,b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k\,b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}\,a^{n+1}\,b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\,a^k\,b^{n-k}.
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux. ■

Corollaire 2 : On a les égalités suivantes :

$$\textbf{(i)}\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad ; \qquad \textbf{(ii)}\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

démonstration *: Pour (i), on utilise le théorème précédent avec $a = 1$ et $b = 1$. Pour (ii), on l'utilise avec $a = -1$ et $b = 1$.* ■

`Remarque 3` : Le point (i) traduit le fait que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n. En effet, ce nombre est la somme des nombres de parties ayant respectivement 0, 1, ...éléments (le cardinal d'une union disjointe est la somme des cardinaux), ce qui correspond bien à la somme indiquée.

3.3 Applications

3.3.1 Exemples triviaux

Le Loto : Il s'agit de choisir 7 nombres parmi 49. L'ordre ne comptant pas, on dénombre le nombre de parties de 7 éléments de l'ensemble $\{1, \dots, 49\}$ de cardinal 49 : il y a donc $\binom{49}{7}$ possibilités, soit 85 900 584.

Dénombrement : On tire au hasard 5 cartes d'un jeu en comptant 32. Combien de tirages sont possibles où l'on ait...

– exactement trois rois ? $\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{2}=1\,512$;
– au moins trois rois ? $\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{2}+\binom{4}{4}\cdot\binom{28}{1}=1\,540$;
– deux $\heartsuit$ et trois $\diamondsuit$? $\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{3}=1\,568$;

3.3.2 Sommes

La formule itérée de Pascal permet de déterminer des sommes de la formes $\sum_{k=0}^{n} k^p$ pour un certain p donné. Voyons par exemple ce que cela donne avec $p=1$, puis $p=2$.

$\boldsymbol{p=1}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$\boldsymbol{p=2}$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{2!\,(k-2)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\binom{n+1}{3},$$

les premières égalités étant du calcul formel, et la dernière l'application de la formule itérée de Pascal. On en tire alors (connaissant le résultat pour $p=1$) :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^2=\binom{n+1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3.3.3 Trigonométrie (linéarisation)

Exercice : Linéariser $\sin^3(x)$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})^3\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-\binom{3}{1}e^{2ix}\,e^{-ix}+\binom{3}{2}e^{ix}\,e^{-2ix}-e^{-3ix}\right)\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}-3(e^{ix}-e^{-ix})\right)=-\frac{1}{4}\left(\sin(3x)-3\sin x\right).
\end{aligned}$$

3.3.4 Petit théorème de Fermat

Théorème 3 : Soient p une entier naturel premier et $a\in\mathbb{Z}$. Alors $a^p\equiv a\ [p]$.

démonstration : *Puisque p est premier, alors pour tout $k\in\{1,\dots,p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$. En effet, $\binom{p}{k}=p(p-1)\cdots(p-k+1)/k! \Leftrightarrow k!\,\binom{p}{k}=p(p-1)\cdots(p-k+1)$. Comme p est premier, il est premier avec tout entier le précédent, donc $p\wedge k=1$, et il vient que p ne divise pas $k!$. Par le théorème de Gauss, il s'ensuit que p divise $\binom{p}{k}$.*

Procédons ensuite par récurrence sur l'entier $a\in\mathbb{N}$.

- **Initialisation :** *Si $a = 0$, le résultat est évident.*
- **Hérédité :** *Supposons que $(a-1)^p \equiv a - 1\ [p]$.*

$$a^p = (a-1+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \tbinom{p}{k}(a-1)^k \equiv (a-1)^p + 1\ [p] \overset{\text{H.R.}}{\equiv} a - 1 + 1\ [p] \equiv a\ [p].$$

Si $a \in (-\mathbb{N})^*$, alors $-a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a)^p \equiv -a\ [p]$. Supposons alors un instant $p \neq 2$ de sorte que la condition p premier soit équivalente à dire que p est impair. La relation de congruence précédente devient alors $-a^p \Leftrightarrow -a\ [p] \Leftrightarrow a^p \Leftrightarrow a\ [p]$. Enfin, si $p = 2$, alors quelque soit a, l'entier $a^p - a$ est pair, et donc divisible par p. ■

3.3.5 Formule de Van der Monde

Proposition 2 : Pour tous entiers m, n et p tels que $p \leqslant m + n$, on a l'égalité

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

démonstration : *Soit x un réel. Alors $(1+x)^m\,(1+x)^n = (1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{m+n} \binom{m+n}{p}\, x^p$. Or*

$$\begin{aligned}
(1+x)^m\,(1+x)^n &= \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\, x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, x^j\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j}\, x^{i+j} \\
&= \left[\binom{m}{0}\binom{n}{0}\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{1} + \binom{m}{1}\binom{n}{0}\right) x\right] + \left[\left(\binom{m}{0}\binom{n}{2} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left.\binom{m}{1}\binom{n}{1} + \binom{m}{2}\binom{n}{0}\right) x^2\right] + \cdots \\
&= \sum_{p=0}^{m+n} \left[\left(\sum_{\substack{i,j>0\,|\\ i+j=p}} \binom{m}{i}\binom{n}{j}\right) x^p\right].
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de ce polynôme de degré p, on obtient finalement que pour tout entier $p \in \{0, \ldots, m+n\}$,

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{\substack{i,j>0\,|\\ i+j=p}} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{p} \binom{m}{i}\binom{n}{p-i}.$$

■