LEÇON N° 4 :

Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).

Pré-requis :
- *Ensemble et cardinal ;*
- *Épreuve et schéma de Bernoulli.*

Introduction

Nous disposons d'un dé équilibré, et on va lancer ce dé autant de fois que voulu. Le lancé de dé est une expérience aléatoire (car l'issue n'est pas connue avant sa réalisation), c'est donc une expérience reproductible dépendant du hasard, dont nous connaissons les issues possibles : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A-t-on plus de chances de tomber sur un chiffre pair plutôt qu'un impair ?

Pour répondre à notre problème, nous allons dans un premier temps simuler une telle expérience de lancer de dé.

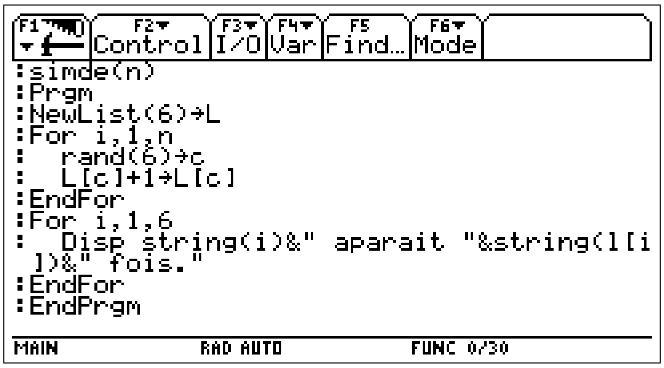
4.1 Modèle expérimental

4.1.1 Simulation

Le programme suivant [1] (TI-89 à Voyage 200) prend le nombre de lancers de notre expérience en paramètre, et renvoie le nombre d'apparitions de chaque chiffre présent sur le dé :

---

[1] : Dans une ancienne version coexistait une fonction et un programme se chargeant de faire ce travail. Cécile F. (son site "http://pedagomaths.ifrance.com/" propose plein de programmes sur calculatrice) m'a proposé cette version plus courte.



4.1.2 Observations

Définition 1 : On appelle *fréquence* d'une issue, le quotient de l'effectif de cette issue par l'effectif total. Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$f_i = \frac{n_i}{N}, \qquad \text{avec } N = \sum_{i=1}^{n} n_i.$$

Tous les résultats suivants proviennent de la calculatrice, en faisant `simde(n)` (en remplaçant évidemment n par l'une des valeurs suivantes) :

Pour $n = 10$, on trouve :

Issue	1	2	3	4	5	6
Effectif n_i	4	2	1	0	1	2
Fréquence f_i	0,4	0,2	0,1	0	0,1	0,2

Pour $n = 50$, on trouve :

Issue	1	2	3	4	5	6
Effectif n_i	8	9	4	12	12	8
Fréquence f_i	0,16	0,18	0,08	0,24	0,24	0,16

Pour $n = 100$, on trouve :

Issue	1	2	3	4	5	6
Effectif n_i	17	14	16	13	19	14
Fréquence f_i	0,17	0,14	0,16	0,13	0,19	0,14

Pour $n = 150$, on trouve :

Issue	1	2	3	4	5	6
Effectif n_i	23	26	15	27	22	25
Fréquence f_i	$\approx$ 0,153	$\approx$ 0,173	0,1	0,18	$\approx$ 0,147	$\approx$ 0,167

Pour $n = 300$, on trouve :

Issue	1	2	3	4	5	6
Effectif n_i	49	47	55	51	56	51
Fréquence f_i	$\approx$ 0,163	$\approx$ 0,157	$\approx$ 0,183	0,17	$\approx$ 0,187	0,17

4.1.3 Interprétation

Pour $n = 10$: La fréquence d'obtention d'un nombre pair est égale à $f_2 + f_4 + f_6 = 0,4$ (soit 40%), et d'un nombre impair à $100\% - 40\% = 60\%$.

Pour $n = 50$: La fréquence d'obtention d'un nombre pair est égale à 58%, et d'un nombre impair à 42%.

Pour $n = 100$: La fréquence d'obtention d'un nombre pair est égale à 41%, et d'un nombre impair à 59%.

Pour $n = 150$: La fréquence d'obtention d'un nombre pair est égale à 52%, et d'un nombre impair à 48%.

Pour $n = 300$: La fréquence d'obtention d'un nombre pair est égale à 49,7%, et d'un nombre impair à 50,3%.

On constate que la valeur des fréquences de chaque issue semble s'approcher de la valeur « idéale » $1/6 \approx 0,166\dots$ et qu'on a 50% de chances d'obtenir un nombre pair, quand le nombre de lancers devient plus important.

4.1.4 Conclusion

Cette fréquence idéale nous permet d'introduire une nouvelle modélisation, ainsi que la notion de probabilité.

4.2 Vers le modèle idéal

4.2.1 Modélisation

Définition 2 : On appelle :

1. ***univers*, noté Ω, l'ensemble de toutes les issues de notre expérience aléatoire ;**
2. ***événement élémentaire* ou *singleton*, une issue de Ω ;**
3. ***événement A*, une partie de Ω. C'est l'ensemble des événements qui sont dans Ω.**

On note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

Dans notre exemple :

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\text{Card}(\Omega) = 6$. Ω est donc bien fini (comme le suggère le titre de la leçon).
2. $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ et $\{6\}$ en sont les événements élémentaires.
3. L'ensemble $A = \{2, 4, 6\}$ correspond à l'événement $A =$ "obtenir un nombre pair". Cet ensemble est constitué d'une réunion disjointe d'événements élémentaires : $A = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$.

4.2.2 Probabilité

Définition 3 : Une *probabilité* sur l'univers Ω (avec $\mathrm{Card}(\Omega) = n$, est une application $\mathrm{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$ telle que :
◇ $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
◇ pour $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Proposition 1 :

(i) $\mathrm{P}(A^c) = \mathrm{P}(\Omega \backslash A) = 1 - \mathrm{P}(A)$, où A^c désigne le complémentaire de A dans Ω ;

(ii) $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$;

(iii) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

démonstration *:*

(i) $A \cup A^c = \Omega$ *et* $A \cap A^c = \varnothing$, *donc en combinant cette égalité avec la définition ci-dessus, on a* $1 = \mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(A \cup A^c) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^c)$, *d'où* $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

(ii) $\Omega^c = \varnothing$, *donc* $\mathrm{P}(\varnothing) = \mathrm{P}(\Omega^c) = 1 - \mathrm{P}(\Omega) = 0$, *en utilisant (i) et la définition ci-dessus.*

(iii) $A \cup B = A \cup (B \backslash A \cap B)$ *et* $A \cap (B \backslash A \cap B) = \varnothing$. *En utilisant la définition ci-dessus, nous avons donc :*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cup B) &= \mathrm{P}\big(A \cup (B \backslash A \cap B)\big) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \backslash A \cap B) \\ &= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

■

Cas de l'équiprobabilité

Définition 4 : On dit qu'il y a *équiprobabilité* si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Proposition 2 : Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et que Ω est muni d'une équiprobabilité, alors on a

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

démonstration *: Soit* $A \in P(\Omega)$, *avec* $\mathrm{Card}(A) = a \geqslant 1$. *Soit* ω_i, *pour* $i \in \{1, \ldots, a\}$, *les singletons de* A. *On peut alors écrire* A *comme une réunion disjointe de ses singletons. Puisque nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, chaque singleton a pour probabilité* $1/\mathrm{Card}(\Omega)$, *d'où*

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{a} \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{a} \mathrm{P}(\omega_i) = \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{a}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

■

Dans notre exemple : Lorsqu'on lance un dé équilibré, on est dans une situation d'équiprobabilité. Chaque événement élémentaire a donc pour probabilité $1/\mathrm{Card}(\Omega)$, soit $1/6$. La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc égale à $\mathrm{P}(A) = 3/6 = 1/2$.

4.3 Prolongement

Nous disposons d'un dé équilibré, et nous sommes en situation d'équiprobabilité. Soit X une variable aléatoire comptant le nombre de 4 obtenus après $n \geqslant 1$ lancers.

1. Montrer que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{6})$.
2. Calculer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier k compris entre 1 et 10.
3. Pour combien de lancers a-t-on la plus forte probabilité de n'obtenir que des 4 ?

En lançant ce dé n fois, on peut définir une variable aléatoire X qui compte par exemple le nombre de 6 obtenus : X suit donc une loi binômiale $\mathscr{B}(n, \frac{1}{6})$ (parce que n épreuves indépendantes de Bernoulli $\mathscr{B}(1, \frac{1}{6})$, cf. leçon n° 7). Par conséquent, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on aura

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Exercice : Pour 20 lancers, calculer $\mathrm{P}(X = k)$ pour tout entier naturel k inférieur à 10. Au cours de 20 lancers, à combien de 6 obtenus correspond la plus forte probabilité ?

Solution : Nous allons récapituler ces informations dans un tableau :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\geqslant 10$
$\mathrm{P}(X = k)$	0,026	0,104	0,198	0,238	0,202	0,129	0,065	0,026	0,008	0,002	0,0006

Nous constatons que la plus forte probabilité est atteinte pour $k = 3$, ce qui veut dire qu'au cours de 20 lancers, on a le plus de chances d'obtenir trois 6.