

# LEÇON N° 7 :

## Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.

### Pré-requis :

- Probabilités : définition, calculs et probabilités conditionnelles ;
- Notion de variables aléatoires, et propriétés associées : espérance, variance ;
- Indépendance de variables aléatoires :  $X \perp Y \Leftrightarrow P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$ .

### Introduction

**Définition 1 :** On appelle *épreuve de Bernoulli* toute épreuve ne possédant que deux issues possibles, que l'on appelle *succès* et *échec*.

Si  $X$  désigne une variable aléatoire réelle comptant le nombre de succès dans une épreuve de Bernoulli, alors nous avons les deux cas suivants :

- ◇  $(X = 1)$  est l'événement correspondant au succès : on lui donne la probabilité  $p$  ( $p \in [0, 1]$ ) ;
- ◇  $(X = 0)$  est donc l'événement correspondant à l'échec. Il a pour probabilité  $q = 1 - p$ .

Si une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi de Bernoulli, alors on note  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(p)$ , où  $p$  désigne la probabilité du succès.

### Exemples :

1. Le lancer d'une pièce équilibrée (non truquée) est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles :
  - ◇ Soit  $(X = 1)$ , correspondant à l'événement « obtenir Pile », de probabilité 0,5 ;
  - ◇ Soit  $(X = 0)$ , correspondant à l'événement « obtenir Face », de probabilité 0,5.
2. Si on lance un dé équilibré, on peut considérer (par exemple) l'événement « obtenir 6 » comme étant le succès, et donc l'événement « ne pas obtenir 6 » comme l'échec. Dans ces conditions,  $P(X = 1) = 1/6$  et  $P(X = 0) = 5/6$ .

Remarque 1 : Puisqu'il n'y a que deux issues possibles dans une épreuve de Bernoulli, c'est nous qui choisissons quel événement sera synonyme de succès. On aura pu choisir l'événement « obtenir Face » comme succès dans l'exemple précédent.

**Théorème 1 :** L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli sont données par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = p(1 - p) = pq.$$

**démonstration** : Récapitulons la loi d'une variable aléatoire de Bernoulli grâce au tableau suivant :

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	$p$

Rappelons les formules donnant l'espérance et la variance d'une variable aléatoire :

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = E((X - E(X))^2).$$

Ici, nous avons donc  $E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$  et

$$\text{Var}(X) = (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) = (1 - p)[p(1 - p) + p^2] = p(1 - p). \quad \blacksquare$$

## 7.1 Schéma de Bernoulli

Effectuons maintenant  $n$  épreuves successives de Bernoulli (par exemple, on lance  $n$  fois de suite une pièce équilibrée). On a donc pour univers  $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles, chacune suivant une loi de Bernoulli. La variable  $X_i$  est définie de  $\Omega$  dans  $\{0, 1\}$  par  $X_i((x_1, \dots, x_n)) = x_i$ , avec  $x_i = 1$  en cas de succès, et  $x_i = 0$  en cas d'échec.

Pour cette expérience aléatoire, on se fixe quelques hypothèses de départ :

$H_1$  :  $\mathcal{L}(X_1) = \dots = \mathcal{L}(X_n) = \mathcal{B}(p)$  ;

$H_2$  : La variable aléatoire  $X_i$  est indépendante de  $X_1, \dots, X_{i-1}$ , et de plus

$$P_{X_1=\varepsilon_1, \dots, X_{i-1}=\varepsilon_{i-1}}(X_i = \varepsilon_i) = P(X_i = \varepsilon_i),$$

avec  $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$  pour tout  $0 \leq k \leq i$ .

**Théorème 2** : Il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  qui vérifie  $H_1$  et  $H_2$ .

**démonstration** :

**Analyse** : Supposons qu'une telle probabilité existe. Soit  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \Omega = \{0, 1\}^n$  un événement élémentaire. On a alors, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = P_{X_1=\varepsilon_1, \dots, X_{n-1}=\varepsilon_{n-1}}(X_n = \varepsilon_n) P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} = \varepsilon_{n-1}).$$

En utilisant l'hypothèse  $H_2$ , on a alors

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = P(X_n = \varepsilon_n) P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_{n-1} = \varepsilon_{n-1}).$$

En répétant ce procédé  $n - 1$  fois, on obtient au final

$$P(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = \varepsilon_i).$$

Les valeurs de  $P$  sur les événements élémentaires déterminent de manière unique cette probabilité :

$$\mathbb{P}(X = (x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n P(X_i = \varepsilon_i).$$

**Synthèse :** Définissons  $\mathbb{P}$  sur les événements élémentaires par la relation

$$\mathbb{P}(X = (x_1, \dots, x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_2, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = \varepsilon_i).$$

**Est-ce une probabilité ?** On a

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^n \sum_{\omega \in \Omega_k} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^n \sum_{\omega \in \Omega_k} p^k q^{n-k},$$

avec  $q = 1 - p$  et  $\Omega_k = \{ \text{événements élémentaires admettant exactement } k \text{ succès} \}$ .

En effet, si  $\omega \in \Omega_k$ , alors on a (d'après l'hypothèse  $H_1$ )

$$\mathbb{P}(\omega) = (\mathbb{P}(X_i = 1))^k (\mathbb{P}(X_i = 0))^{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Pour obtenir  $k$  succès au bout de  $n$  épreuves de Bernoulli, on a  $\binom{n}{k}$  possibilités. Au final,

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

La dernière égalité provient de la formule du binôme de Newton.

De plus, montrer que  $\mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2)$  est évident grâce à la définition de  $\mathbb{P}$ . En effet, si l'on note  $\omega_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  et  $\omega_2 = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2) &= \mathbb{P}((X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) \cup ((X_1 = \epsilon_1, \dots, X_n = \epsilon_n))) \\ &\stackrel{P \text{ proba}}{=} \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) + \mathbb{P}(X_1 = \epsilon_1, \dots, X_n = \epsilon_n) \\ &= \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2). \end{aligned}$$

**$\mathbb{P}$  vérifie-t-elle  $H_1$  et  $H_2$  ?** Étant partis de ces hypothèses pour construire  $\mathbb{P}$ , on peut affirmer que cette probabilité vérifie bien les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$ .

Nous laissons cette vérification au soin du lecteur. ■

**Définition 2 :** L'univers  $\Omega$  muni de la probabilité  $\mathbb{P}$  est appelé **schéma de Bernoulli à  $n$  épreuves, et de paramètre  $p$** .

Remarque 2 : Dans la suite, nous noterons la probabilité  $\mathbb{P}$  par la lettre « simple »  $P$ . Il ne peut y avoir de confusion possible entre une épreuve et un schéma de Bernoulli, d'où cette identification.

## 7.2 Loi binomiale

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un schéma de Bernoulli à  $n$  épreuves, de paramètre  $p$ . Soit  $S_n$  la variable aléatoire associée au nombre de succès au bout de  $n$  épreuves de Bernoulli, donc définie de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

**Définition 3 :** Dans ces conditions, on dit que  $S_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .

**Théorème 3 :** Si  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n, p)$ , alors pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

*démonstration :* Découle directement de la démonstration ci-dessus. ■

**Exemple :** On lance un dé 10 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est égale à

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,84,$$

où  $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$  désigne la probabilité de n'obtenir 6 aucune fois.

**Théorème 4 :** Soit  $S_n$  une variable aléatoire réelle suivant une loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Alors

$$E(S_n) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(S_n) = np(1 - p) = npq.$$

*démonstration :* On note  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , où pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{B}(p)$ .

**Espérance :** Puisque l'espérance est linéaire, on a directement que

$$E(S_n) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

**Variance :** Puisque les  $X_i$  sont deux à deux indépendants, la variance devient linéaire, de sorte que

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^n p(1 - p) = np(1 - p) = npq.$$

■

## 7.3 A la calculatrice...

Avec la TI Voyage 200, nous allons simuler le schéma de Bernoulli introduit précédemment grâce au tableur (« Cell-sheet »). On rappelle l'expérience et les résultats théoriques : on lance un dé 10 fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est de  $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,84$ . Voici la marche à suivre (des captures d'écran sont sur la page suivante – une capture par étape – afin de mieux comprendre) :

1. Dans l'écran **Home**, définir les fonctions suivantes :
  - la fonction qui renvoie 1 lorsque l'argument qu'on lui donne vaut 6, et 0 sinon :

$$\text{when}(x = 6, 1, 0) \rightarrow f(x) ;$$

– la fonction qui renvoie 0 lorsque l'argument qu'on lui donne vaut 0, et 1 sinon :

$$\text{when}(x = 0, 0, 1) \rightarrow g(x).$$

- Dans le tableur, donnez des titres à vos colonnes (ici, les colonnes  $A$  à  $J$  nous servirons à matérialiser les 10 lancers<sup>1</sup> ; nous les mettons en colonne pour pouvoir faire une seconde, puis une troisième expérience de ce schéma de Bernoulli, que nous transcrivons donc dans les deux lignes 2 et 3 [la 1 concernant notre premier essai] : par exemple, «  $\ell 1$  » pour la colonne  $A$ , ..., «  $\ell 10$  » pour la  $J$ , « somme » pour la colonne  $K$ , où l'on comptera le nombre de 6 apparus, et « O/N » pour la colonne  $L$ , où l'on mettra 0 s'il n'y a pas de 6 et 1 s'il y en a au moins un dans la ligne.
- Pour entrer la même formule dans une plage de cases, aller dans **Edit** (F3), puis **Fill range** (3) pour introduire notre formule après le = de la ligne **Formula**, qui sera **f(rand(6))**. Une fois effectué, modifier la ligne **Range** de sorte à mettre dedans notre plage : **A2 :J4**
- Entrer la formule := **A2+B2+C2+D2+E2+F2+G2+H2+I2+J2** dans la plage **K2 :K4** de la même manière.
- Entrer la formule := **g(K2)** dans la plage **L2 :L4**.
- Pour calculer la fréquence, entrer la formule := **sum(L2 :L4)/3** dans la case **L5**.
- Pour refaire la simulation, faire **Recalc** (F8).

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\begin{cases} 1, x = 6 \\ 0, \text{else} \end{cases} \rightarrow f(x)</math> Done</li> <li><math>\begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, \text{else} \end{cases} \rightarrow g(x)</math> Done</li> </ul>					
<b>when(x=0,0,1)→g(x)</b>					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

  

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
lec	H	I	J	K	L	M	
1	108	109	110	somme	O/N		
2							
3							
4							
5							
6							
7							
<b>L2 :</b>							
MAIN RAD AUTO FUNC							

  

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
lec	F	G	H	I	J	K	
1	106	107	108	109	110	somme	
2	0	0	1	0	0		
3	0	0	0	1	0		
4	0	0	0	0	0		
5							
6							
7							
<b>A2 :J4</b>							
MAIN RAD AUTO FUNC							

  

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
lec	G	H	I	J	K	L	
1	107	108	109	110	somme	O/N	
2	1	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	1	
4	0	0	0	0	1	1	
5							
6							
7							
<b>K2 :K4</b>							
MAIN RAD AUTO FUNC							

  

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
s01	H	I	J	K	L	M	
1	108	109	110	somme	O/N		
2	1	0	0	2	1		
3	0	0	0	0	0		
4	0	1	0	2	1		
5							
6							
7							
<b>L5 :</b>							
MAIN RAD AUTO FUNC							

  

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
s01	I	J	K	L	M	N	
1	109	110	somme	O/N			
2	0	0	2	1			
3	0	0	0	0			
4	0	0	1	1			
5				.66667			
6							
7							
<b>L6 :</b>							
MAIN RAD AUTO FUNC							

<sup>1</sup> : Pour ce faire, encadrez votre texte de guillemets (") avant de valider, sinon la calculatrice ne saura pas que c'est du texte.

## Fréquence d'apparition des 6

Pour 3 expériences de ce schéma de Bernoulli, on trouve  $\frac{2}{3} \approx 0,6667$ .

Pour 10 expériences (il faudrait donc rajouter 7 lignes), on trouve  $\frac{8}{10} = 0,8$ .

Pour 100 expériences, on trouve  $\frac{81}{100} = 0,81$ .

Pour 1000 expériences, on trouve  $\frac{819}{1000} = 0,819$ .

Plus le nombre d'expérience est grand, plus la fréquence d'apparition des 6 se rapproche de  $p$  (on rappelle que dans notre exemple,  $p \approx 0,84$ , ce qui illustre bien le théorème suivant :

**Théorème 5 (inégalité de Tchebychev) :** Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Alors

$$P \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$