LEÇON N° 15 :

Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Nombres décimaux, développement décimal d'un nombre rationnel.

Pré-requis :
- *Relations d'équivalence, ensembles quotient, PGCD, théorème de Gauss ;*
- *Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable ;*
- *Ensemble $\mathbb{N}$ et anneau $\mathbb{Z}$ (en particulier que $\mathbb{Z}$ est bien ordonné) ;*
- *Système de numération en base 10 (existence et unicité de l'écriture d'un entier en base 10 connue comme conséquence fondamentale de l'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{N}$).*

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, on sait que l'équation $ax = b$ n'admet dans $\mathbb{Z}$ qu'une solution lorsque $a|b$. On souhaiterait donc étendre cet ensemble de solutions aux cas où a ne diviserait pas b. Le but de cette leçon va donc être la construction d'un corps commutatif contenant $\mathbb{Z}$ et dans lequel l'équation $ax = b$ admette une solution.

15.1 Construction de $\mathbb{Q}$

Définition 1 : Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On définit la relation $\mathscr{R}$ par

$$(a, b) \mathscr{R} (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

Proposition 1 : $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

***démonstration** :*

Réfléxivité : $ab = ba$, *donc* $(a, b) \mathscr{R} (a, b)$.

Symétrie : $(a, b) \mathscr{R} (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow bc = ad \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d) \mathscr{R} (a, b)$.

Transitivité : *On suppose* $(a, b) \mathscr{R} (c, d)$ *et* $(c, d) \mathscr{R} (e, f)$, *c'est-à-dire* $ad = bc \quad (\flat)$ *et* $cf = de \quad (\sharp)$.
Si $c = 0$, *alors* $a = e = 0$ *(car* $\mathbb{Z}$ *est intègre, et* $b, d \neq 0$*), donc* $af = 0 = be \Leftrightarrow (a, b) \mathscr{R} (e, f)$.
Supposons alors $c \neq 0$. *Le produit de* $(\flat)$ *et* $(\sharp)$ *donne* $af\,cd = bc\,ed \Leftrightarrow af = be$ *car* $\mathbb{Z}$ *intègre et* $c, d \neq 0 \Rightarrow cd \neq 0$. *D'où* $(a, b) \mathscr{R} (e, f)$.

$\mathscr{R}$ *vérifie les trois points de la définition d'une relation d'équivalence.* ■

Définition 2 : Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. La classe d'équivalence de (a, b) est appelée *nombre rationnel*. On la note $\frac{a}{b}$ ou a/b, et a (resp. b) est appelé *numérateur* (resp. *dénominateur*). Enfin, l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathscr{R}$ est appelé *ensemble des nombres rationnel*, et sera noté $\mathbb{Q}$.

`Remarque 1` : Pour tout $c \in \mathbb{Z}^*$, $(a,b)\ \mathscr{R}\ (ca,cb)$, c'est-à-dire $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ca}{cb}$.

Proposition 2 : Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$r = \frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad a \wedge b = 1.$$

Dans ce cas, $r = a/b$ est appelée *fraction irréductible*.

démonstration *:*

Existence : *Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = a/b$. On peut se ramener à $b \in \mathbb{N}^*$ en posant $a = -a$ et $b = -b$ puisque $(a,b)\ \mathscr{R}\ (-a,-b)$ d'après la remarque. Soit alors $d = |a| \wedge b$. Alors il existe a', b' tels que $a = da'$ et $b = db'$ avec $a' \wedge b' = 1$, d'où*

$$r = \frac{a}{b} = \frac{da'}{db'} \overset{rq\,1}{=} \frac{a'}{b'},$$

avec $(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Unicité : *Soit $r = a/b = c/d$, avec $a \wedge b = c \wedge d = 1$. Or $a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$, et d'après le théorème de Gauss, on a d'une part que $d|bc$ et $c \wedge d = 1 \Rightarrow d|b$, et d'autre part $b|ad$ et $a|wedgeb = 1 \Rightarrow b|d$. Au final, $b = d$ car ils sont tous les deux éléments de $\mathbb{N}^*$, et il en découle que $a = c$. Les deux fractions sont les mêmes.*

L'unicité justifie alors la définition de fraction irréductible. ∎

15.2 Structure de corps de $\mathbb{Q}$

On munit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ de deux lois de composition internes définies pour tous éléments (a,b) et (c,d) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (ad + bc, bd), \\ (a,b) \cdot (c,d) &= (ac, bd). \end{aligned}$$

`Remarque 2` : $b, d \neq 0$ par hypothèse, et $\mathbb{Z}$ intègre impliquent que $bd \neq 0$.

Proposition 3 : Ces deux lois sont compatibles avec $\mathscr{R}$.

démonstration *: Soient $(a,b)\ \mathscr{R}\ (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$ et $(a',b')\ \mathscr{R}\ (c',d') \Leftrightarrow a'd' = b'c'$ (notons ces deux égalités $(\flat)$). Alors on a que*

$$\begin{aligned} & (ab' + a'b)\, dd' = adb'd' + bda'd' \overset{(\flat)}{=} bcb'd' + bdb'c' = bb'(cd' + c'd) \\ \Leftrightarrow\ & (ab' + a'b, bb')\ \mathscr{R}\ (cd' + c'd, dd') \\ \Leftrightarrow\ & \big((a,b) + (a',b')\big)\ \mathscr{R}\ \big((c,d) + (c',d')\big) \end{aligned}$$

pour ce qui concerne l'addition. Pour la multiplication, on a

$$\begin{aligned} & aa'dd' = ada'd' \overset{(b)}{=} bcb'c' = bb'cc' \\ \Leftrightarrow\ & (aa', bb')\ \mathscr{R}\ (cc', dd') \\ \Leftrightarrow\ & \big((a,b)\cdot(a',b')\big)\ \mathscr{R}\ \big((c,d)\cdot(c',d')\big), \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Définition 3 : Ces deux lois, notés $+_{\mathbb{Q}}$ et $\cdot_{\mathbb{Q}}$ sont appelées *addition* et *multiplication sur* $\mathbb{Q}$. On les notera plus simplement $+$ et $\cdot$ lorsqu'il n'y a pas confusion.

Théorème 1 : $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}})$ est un corps commutatif.

démonstration *:*

a) *Ces deux lois sont associatives et commutatives.*

b) $\cdot$ *est distributive par rapport à $+$. En effet,*

$$\begin{aligned} (a,b)\cdot\big((c,d)+(c',d')\big) &= (a,b)\cdot(cd'+c'd, dd') \\ &= (acd'+ac'd, bdd') \\ (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(c',d') &= (ac,bd)+(ac',dd') \\ &= (abcd'+abdc', bbdd') \overset{b\neq 0}{=} (acd'+adc', bdd'), \end{aligned}$$

et ces deux quantités sont bien égales.

c) $+$ *admet $\frac{0}{1}$ comme élément neutre, et $\cdot$ admet $\frac{1}{1}$ comme élément neutre. Ils sont uniques en vertu de la proposition 3.*

d) $\frac{-a}{b}$ *est l'inverse de $\frac{a}{b}$ pour l'addition (en effet, $(a,b)+(-a,b) = (ab-ab, b^2) = (0,1)$) et $\frac{b}{a}$ en est l'inverse pour la multiplication (en effet, $(a,b)\cdot(b,a) = (ab,ab) = (1,1)$).*

$\mathbb{Q}$ *est donc bien un corps, commutatif puisque ses lois le sont.* ■

Plongement de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

Proposition 4 : L'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}) \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux injectif.

démonstration *:*

a) *φ(élément neutre de $+_{\mathbb{Z}}$) $= \varphi(0) = \frac{0}{1}$ =élément neutre de $+_{\mathbb{Q}}$. De même, φ(élément neutre de $\cdot_{\mathbb{Z}}$) $= \varphi(1) = \frac{1}{1}$ =élément neutre de $\cdot_{\mathbb{Q}}$*

b) $\varphi(a+b) = \frac{a+b}{1} = a\cdot 1 + b\cdot 11\cdot 1 = \frac{a}{1} +_{\mathbb{Q}} \frac{b}{1} = \varphi(a) +_{\mathbb{Q}} \varphi(b)$

c) $\varphi(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

d) $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b$.

On en déduit que φ est bien un morphisme d'anneaux injectif. ■

Conséquence : On identifie $\mathbb{Z}$ à $\varphi(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'on notera simplement l'élément $a/1$ de $\mathbb{Q}$ sous la forme a. Revenons alors au problème en introduction :

$$ax = b \Leftrightarrow \frac{a}{1} \cdot x = \frac{b}{1} \Leftrightarrow x = \left(\frac{a}{1}\right)^{-1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{b}{1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q},$$

et le corps ainsi créé correspond bien à ce qu'on attendait de lui.

15.3 $\mathbb{Q}$ bien ordonné

Définition 4 : On définit $\mathbb{Q}^+ = \{a/b, ab \geqslant 0\}$ et $\mathbb{Q}^- = \{a/b, ab \leqslant 0\}$. Si $r \in \mathbb{Q}^+$ (resp. $\mathbb{Q}^-$), on dit que r est *positif* (resp. *négatif*).

Proposition 5 :

(i) $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^-$ sont stables par addition ;

(ii) Si $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$ (ou $\mathbb{Q}^-$), alors $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}^+$, et si $r_1 \in \mathbb{Q}^+$, $r_2 \in \mathbb{Q}^-$, alors $r_1 r_2 \in \mathbb{Q}^-$;

(iii) $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ et $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$.

démonstration :

(i) $r_1 + r_2 = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$, *qui est du signe de* $a_1 b_1 b_2^2 + a_2 b_1^2 b_2$, *positif par hypothèse si* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$ *et négatif si* $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^-$.

(ii) On montre juste le premier cas. $r_1 \cdot r_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$, *qui est du signe de* $a_1 a_2 b_1 b_2$, *c'est-à-dire positif, par hypothèse.*

(iii) $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$, *donc* $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \subset \mathbb{Q}$. *Réciproquement, soit* $r = a/b$ *est un élément de* $\mathbb{Q}$. *Si* $a \geqslant b$, *alors* $r \in \mathbb{Q}^+$ *et sinon,* $r \in \mathbb{Q}^-$. *D'où* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. *Enfin,* $r \in \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- \Rightarrow ab \geqslant 0$ *et* $ab \leqslant 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0$.

La dernière implication est justifiée par le fait que $b \neq 0$ *(d'après la définition d'un nombre rationnel) et que* $\mathbb{Z}$ *est intègre.* ■

Proposition 6 : La relation définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ par $x \geqslant y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^+$ est une relation d'ordre totale sur $\mathbb{Q}$. Elle est compatible avec $+$ et $\cdot$ pour $r \in \mathbb{Q}^+$.

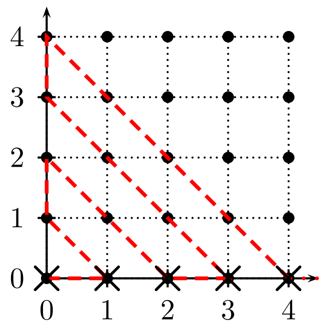
démonstration : *Cette relation est clairement réflexive et transitive. Elle est totale car* $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q}$. *En effet, si* $r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^+$, *alors* $r_2 \geqslant r_1$, *sinon on a* $r_1 - r_2 \in \mathbb{Q}^+$, *donc* $r_1 \geqslant r_2$. ■

Proposition 7 : $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

démonstration : *Soit $r \in \mathbb{Q}, r = a/b$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ r & \longmapsto & (a,b) \end{array}$$

est injective. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables, donc $Z \times \mathbb{N}^*$ aussi, et donc $\mathbb{Q}$ aussi.



■

Définition 5 : Soit $r \in \mathbb{Q}$. On définit la valeur absolue de r, notée $|r|$, par

$$|r| = \begin{cases} r & \textbf{si} \quad r \in \mathbb{Q}^+, \\ -r & \textbf{si} \quad r \in \mathbb{Q}^-. \end{cases}$$

Proposition 8 : La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes ($r, p \in \mathbb{Q}$) :

(i) $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$ **et** $|r| \geqslant 0$;

(ii) $|p + r| \leqslant |p| + |r|$;

(iii) $|pr| = |p|\,|r|$.

démonstration : *Séparer les cas : distinguer r positif ou négatif pour (i) ; $p, r \in \mathbb{Q}^+$, $p, r \in \mathbb{Q}^-$ et $p \in \mathbb{Q}^+, r \in \mathbb{Q}^-$ pour (ii) et (iii).* ■

Prolongement

Nous savons désormais résoudre les équations du type $ax = b$, avec $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Mais qu'en est-il des équations du type $x^2 = a$, $a \in \mathbb{Z}$? Les solutions sont-elles toutes contenues dans le corps que nous venons de construire ?

Etudions par exemple de plus près l'équation $x^2 = 2$, et montrons que sa solution n'est pas un nombre rationnel. Supposons le contraire, de sorte qu'elle s'écrive sous la forme $x = a/b$, avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$, et où x est tel que $x^2 = 2$. Alors

$$\frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow 2|a^2 \Rightarrow 2|a.$$

a s'écrit donc sous la forme $a = 2a'$. Mais alors on a aussi

$$4a'^2 = 2b^2 \Rightarrow 2a'^2 = b^2 \Rightarrow 2|b^2 \Rightarrow 2|b,$$

donc b peut aussi s'écrire sous la forme $b = 2b'$, ce qui contredit l'hypothèse que a/b soit une fraction irréductible.

L' « agrandissement » de ce corps, dans lequel ce type d'équation trouvera des solutions, sera l'objet d'une autre leçon. Il s'agit du corps des réels.

15.4 Définition de $\mathbb{D}$ et premières propriétés

Définition 6 : Un nombre rationnel d est dit *décimal* s'il existe deux entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$d = \frac{m}{10^n}.$$

On note $\mathbb{D}$ l'ensemble de ces nombres décimaux.

Conséquence immédiate : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Proposition 9 : Soit $x = a/b$ un élément de $\mathbb{Q}$, avec a et b premiers entre eux. Alors x est décimal si et seulement s'il existe deux entiers naturels α et β tels que $b = 2^\alpha\, 5^\beta$.

démonstration *:*

"$\Rightarrow$" *Supposons que l'élément $x \in \mathbb{Q}$ soit décimal. Par définition, il existe deux entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{b} = \frac{m}{10^n}$. D'où $a\,10^n = mb$. Puisque a et b sont premiers entre eux, il vient par le théorème de Gauss que b divise $10^n = 2^n\,5^n$, donc b est de la forme $2^\alpha\,5^\beta$, avec $\alpha, \beta \leqslant n$.*

"$\Leftarrow$" *Supposons maintenant qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $b = 2^\alpha\,5^\beta$. Distinguons alors trois cas :*

- *Si $\alpha = \beta$, alors $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{10^\alpha}$,*
- *Si $\alpha > \beta$, alors $\dfrac{a}{2^\alpha\,5^\beta} = \dfrac{a\,5^{\alpha-\beta}}{10\alpha}$,*
- *Si $\alpha < \beta$, alors $\dfrac{a}{2^\alpha\,5^\beta} = \dfrac{a\,2^{\beta-\alpha}}{10\beta}$.*

Dans les trois cas, on se ramène à la définition pour conclure que $x \in \mathbb{D}$.

■

Théorème 2 : $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

démonstration *: La conséquence ci-dessus nous assure déjà que $\mathbb{D}$ n'est pas vide. Soient alors $d = m/10^n$ et $d' = m'/10^{n'}$ deux éléments de $\mathbb{D}$. On a alors*

$$\begin{aligned} d + d' &= \frac{m}{10^n} + \frac{m'}{10^{n'}} = \frac{m\,10^{n'} + m'\,10^n}{10^{n+n'}} \in \mathbb{D}, \\ d \cdot d' &= \frac{m}{10^n} \cdot \frac{m'}{10^{n'}} = \frac{mm'}{10^{nn'}} \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Remarques 3 :
- L'élément $3 \in \mathbb{D}$ n'admet pas d'inverse pour la loi $\cdot$. En effet, $1/3 \notin \mathbb{D}$, et on en déduit que $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ n'a pas de structure de corps ;
- Un nombre décimal d est inversible si et seulement s'il est de la forme $d = \pm 2^{\alpha}\, 5^{\beta}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (conséquence de la proposition 1).

15.5 Approximation d'un rationnel

Théorème 3 : Soient $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique entier relatif $p_n = [10^n\, x]$ tel que

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{p_n + 1}{10^n}. \tag{15.1}$$

démonstration : *En effet,*

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant x < \frac{p_n + 1}{10^n} \Leftrightarrow p_n \leqslant 10^n\, x < p_n + 1 \Leftrightarrow p_n = [10^n\, x].$$

Remarquons que le rationnel $10^n\, x$ est encadré par deux entiers consécutifs, et l'inégalité telle quelle suggère que l'unique entier (membre de gauche) en question est la partie entière du rationnel. ■

Définition 7 : Le nombre $p_n/10^n$ est appelée *valeur décimale approchée par défaut* de x à 10^{-n} près, et $(p_n + 1)/10^n$ sera appelé *valeur décimale approchée par excès* de x à 10^{-n} près.

Corollaire 1 : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{Q}$.

démonstration : *La double inégalité*

$$\frac{p_n}{10^n} \leqslant \frac{a}{b} < \frac{p_n + 1}{10^n} \Leftrightarrow b\, p_n \leqslant a\, 10^n < b(p_n + 1)$$

exprime que $b\, p_n$ est le quotient de la division euclidienne de a par b, d'où l'existence et l'unicité. La suite est une copie de la démonstration du théorème précédent. ■

Théorème 4 : Soit $x \in \mathbb{Q}^+$. Il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

(i) $\forall\, n \geqslant 1, a_n \in \{0, \ldots, 9\}$ **et** $a_0 \in \mathbb{Z}$,

(ii) Il n'existe pas d'entier naturel N tel que pour tout $n > N$, $a_n = 9$,

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

démonstration : *Soit u_n la valeur décimale approchée par défaut de x à 10^{-n} près. La double inégalité en (iii) se réduit alors à l'égalité*

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Soit $m = u_n\, 10^n \in \mathbb{N}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$u_n = \frac{m}{10^n} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \Leftrightarrow m = a_0\, 10^n + a_1\, 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, 10 + a_n.$$

Cette dernière équation n'admet qu'une unique solution dans $\mathbb{N} \times [0 \dots 9]^n$, par unicité de l'écriture en base 10.

Montrons encore que les coefficients a_i sont indépendants du rang choisi. Autrement dit, montrons que $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les mêmes au rang n et $n+1$. Supposons qu'on ait au rang $n+1$ la double-inégalité

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Or, puisque $b_{n+1} \leqslant 9$, on aura nécessairement $\frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}} \leqslant \frac{1}{10^n}$, et notre double-inégalité devient

$$b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{b_n}{10^n} \leqslant x < b_0 + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

L'unicité de la solution $(a_0, \dots, a_n)$ de la relation du (iii) au rang n nous permet d'affirmer que pour tout $i \in [0 \dots n]$, $a_i = b_i$.

Supposons enfin qu'il existe un entier naturel N tel que tout $n \geqslant N$ vérifie $a_n = 9$. Quitte à effectuer une multiplication par une combinaison linéaire de puissances de 10, on est ramené à étudier le cas particulier $0,99\overline{9}\dots$ Or

$$0,99\overline{9} = \sum_{n \leqslant 1} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1,$$

et l'inégalité (iii) n'est plus vraie pour tout n alors, car les membres de gauche et de droite sont égaux, ce qui est contradictoire. ■

Définition 8 : Dans ce cas, par passage à la limite,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n},$$

et l'on dit que c'est le *développement décimal illimité* (noté par la suite DDI) propre de x, et on note de manière plus commode $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$

`Remarques 4 :`

- Un développement décimal illimité est dit impropre s'il ne vérifie pas le théorème 4. Par exemple, $1 = 1,00\overline{0} = 0,99\overline{9}$. Le premier est propre, le second est impropre ;
- Si $x \in \mathbb{Q}^-$, on détermine alors le DDI propre de $-x \in \mathbb{Q}^+$, par exemple $-x = x_0, x_1 x_2 \dots$. L'on pose alors $x = -x_0, x_1 x_2 \dots$.

Compléments et prolongements possibles

15.5.1 Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Proposition 10 : $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

démonstration : *Supposons que $\mathbb{R}$ soit dénombrable. On aurait alors l'égalité $[0,1] = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ où $x_i = 0, a_{i,1}a_{i,2}\dots$. Soit alors $x = 0, b_1 b_2 \dots$ un réel tel que $b_i \neq a_{i,i}$ pour tout entier naturel $i \geqslant 1$ (facile à construire !). Alors l'égalité $x = x_i$ entraîne nécessairement $b_n = a_{i,n}$ pour tout $n \geqslant 1$. En particulier, lorsque $n = i$, on aura $b_i = a_{i,i}$, ce qui est contradictoire. Ainsi $[0,1]$, et $\mathbb{R}$ par extension, n'est pas dénombrable.* ■

15.5.2 Théorème de la borne supérieure

Le DDI propre d'un réel peut être utilisé pour introduire axiomatiquement le corps des réels. Encore faut-il montrer la célèbre théorème de la borne supérieure ! ! !

Lemme : On a l'équivalence suivante

$$a_0, a_1 a_2 \dots < b_0, b_1 b_2 \dots \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} a_i = b_i, \forall\, i \in\ [0, k-1], \\ a_k < b_k. \end{cases}$$

démonstration :

"$\Leftarrow$" *Soient $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots$ et $y = a_0 + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \cdots$. Alors $x < \xi$, où*

$$\begin{aligned} \xi &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} + \left(\frac{9}{10^{k+1}} + \frac{9}{10^{k+2}} + \cdots \right) \qquad (\textit{car } a_i < b_i \leqslant 9 \textit{ pour } i \in \mathbb{N}) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \\ &\leqslant a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} \leqslant y. \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" *Posons $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq b_i\}$. Alors $a_k > b_k$ ou $a_k < b_k$. Supposons que ce soit le premier cas, alors*

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \cdots &\leqslant a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \left(\frac{9}{10^{k+1}} + \cdots \right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{b_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \\ &\leqslant a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} \\ &\leqslant a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{a_k}{10^k} + \cdots \end{aligned}$$

En reprenant les notations précédentes, on aurait $y \leqslant x$, ce qui est absurde. Au final, on a bien $a_k < b_k$.

■

Théorème 5 : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure.

démonstration : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^+$ non vide et majorée, de majorant M. Considérons l'ensemble $E_0 = \{[x], x \in A\}$. A étant non vide, il contient au moins un élément x dont on peut extraire la partie entière, et il vient que E_0 n'est pas vide. C'est une partie incluse dans $\mathbb{N}$ et majorée par M (en effet, si $x = M$, alors $[x] = M$), dnoc possède un plus grand élément que l'on note s_0.*

Considérons maintenant l'ensemble $E_1 = \{a_1 \in [0\dots9] \mid x = s_0, a_1a_2a_3\dots\}$ (non vide car A n'est pas vide implique que tout x de A possède un DDI), qui est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par 9, et possède donc un plus grand élément note s_1.

On montre ainsi que pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble E_n construit par récurrence par $E_n = \{a_n \in [0\dots9] \mid x = s_0, s_1 \dots s_{n-1}a_na_{n+1}\dots\}$ possède un plus grand élément noté s_n, et l'on aboutit ainsi à $x = s_0, s_1 \dots s_n \dots$. C'est le lemme précédent qui nous assure que ce nombre $s_0, s_1 \dots s_n \dots$ est la borné supérieure recherchée. ■