LEÇON N° 16 :

Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.

Pré-requis :
- *Notions d'anneaux, de corps ;*
- *Résolution des équations du second degré ;*
- (*Théorème de Liouville*).

16.1 Introduction historique

Bien que les nombres complexes soient introduits au lycée immédiatement après la résolution des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (pour tous $a \neq 0$, b et c réels), leur invention n'est pas due à cela. Elle vient en fait d'algébristes du XI^e siècle tentant de résoudre les équations du troisième degré. En effet, après avoir transformé l'équation $x^3 + bx + cx + d = 0$ en $X^3 + pX + q = 0$ par la translation $X = x + \frac{b}{3}$, les italiens déterminent que (formule dite de Cardan)

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}$$

Mais lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$, l'équation $X^2 + pX + q = 0$ admet 3 racines réelles (étudier la fonction $X \longmapsto X^3 + pX + q$ pour s'en convaincre), ce qui bloquait longtemps les algébristes. Bombelli élucida alors ce cas en introduisant ce que l'on note aujourd'hui i et $-i$ (notation en vigueur depuis Gauss : à l'époque, ils écrivaient $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

16.2 Construction de $\mathbb{C}$

Théorème 1 : $(\mathbb{R}^2, +, \times)$, dont les lois sont définies pour tous couples (a, b) et (a', b') de $\mathbb{R}^2$ par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \qquad \text{et} \qquad (a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba'),$$

est un corps commutatif.

démonstration : *Il est immédiat de vérifier que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau, d'élément neutre $(0, 0)$ et d'élément unité $(1, 0)$. C'est de plus un corps car $(a, b) \neq (0, 0)$ admet pour inverse*

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right).$$

La commutativité est elle aussi évidente considérant la loi ci-dessus. ■

Proposition 1 : L'application

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & a & \longmapsto & (a,0) \end{array}$$

est un isomorphisme du corps $\mathbb{R}$ sur $\pi(\mathbb{R})$.

démonstration : *La surjectivité est immédiate. Il est de plus évident que $a \neq b \Rightarrow (a,0) \neq (b,0)$, donc $\pi(a) \neq \pi(b)$.* ■

Conséquences :

1. Par identification, on notera désormais a à la place $(a,0)$ pour tout réel a.
2. Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda(a,b) = (\lambda,0)\cdot(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$.
3. On remarque que $-1 = (-1,0) = (0,1)\cdot(0,1)$, donc -1 est bien un carré dans $(\mathbb{R}^2,+,\times)$.
4. En posant $(0,1) = i$, on a alors pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$$(a,b) = (a,0) + (0,b) \overset{2.}{=} a + b\cdot(0,1) = a + bi.$$
5. Si $\mathbf{C} = \{a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, alors l'application
$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^2,+,\times) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x,y) & \longmapsto & x+iy \end{array}$$
est un isomorphisme.

   démonstration : *Par définition de $\mathbf{C}$, la surjectivité est immédiate. Supposons alors $x_1 + iy_1 = x_2 + iy2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) = 0$. Si $y_1 - y_2 \neq 0$, alors $i = -(x_1-x_2)(y_1-y_2)^{-1} \in \mathbb{R}$, ce qui contredit le fait que -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{R}$, donc $y_1 = y_2$ et $x_1 = x_2$.* ■

Définition 1 : On pose alors $\mathbb{C} = \mathbf{C} \cong (\mathbb{R}^2,+,\times)$, appelé *corps des nombres complexes*. Ainsi,

$$\mathbb{C} = \{a+ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2\},$$

où i est tel que $i^2 = -1$.

Proposition 2 : Soient $x+iy$ et $x'+iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}$. Alors :

(i) $(x+iy = x'+iy') \Leftrightarrow (x = x'$ **et** $y = y')$;

(ii) $(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$;

(iii) $(x+iy)\times(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+x'y)$;

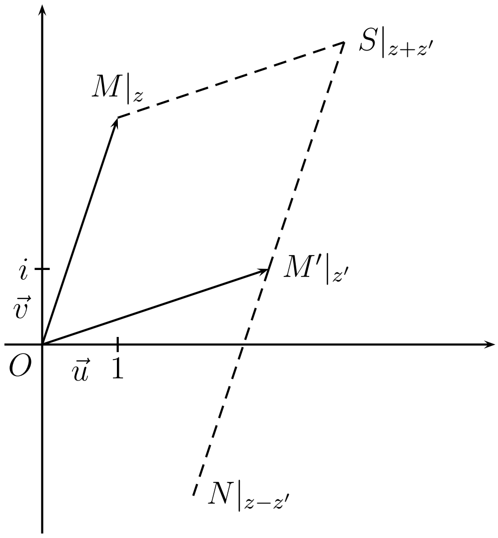
(iv) $i^2 = -1$.

démonstration : *Ces propriétés de $\mathbb{C}$ se déduisent de sa construction ci-dessus.* ■

16.3 Les nombres complexes

16.3.1 Représentation géométrique et définitions

Soit $\mathscr{P}$ la plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



Définition 2 :
- ◇ **$M = (x, y)$ est appelé *image* du nombre complexe $m = x + iy$. On le note $M|_m$ ou $M(m)$. Réciproquement, m est appelé *affixe* du point M.**
- ◇ **Pour tous $M|_z$ et $M'|_{z'}$, le point $N|_{z-z'}$ est tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{ON}$. On dit que $z - z'$ (l'affixe de N) est aussi l'*affixe* de $\overrightarrow{MM'}$. z est donc également l'affixe de $\overrightarrow{OM}$.**

`Remarque 1` : L'addition dans $\mathbb{C}$ s'interprète comme l'addition vectorielle.

16.3.2 Définitions et propriétés

On se donne un nombre complexe $z = a + ib$.

Définition 3 :
- **a est la *partie réelle* de z, notée $\Re\mathrm{e}(z)$. b est la *partie imaginaire* de z, notée $\Im\mathrm{m}(z)$;**
- **Le nombre complexe $a - ib$ est appelé *conjugué* de z, noté $\overline{z}$ (donc en particulier, $\overline{\overline{z}} = z$) ;**
- **Le réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}}$ est appelé *module* de z, noté $|z|$.**

`Remarques 2` :

1. $z\,\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \geqslant 0$, donc $|z|$ est bien défini. Notons que le module coïncide avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.
2. L'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$$
est un morphisme de corps, d'où
$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{-z} = -\overline{z} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \quad ; \quad z \neq 0 \Rightarrow \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}.$$
3. Géométriquement, l'application $z \longmapsto \overline{z}$ est la réflexion par rapport à l'axe réel $(O, \vec{u})$.

Lemme : Si $Z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, alors l'équation $z^2 = Z$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{C}$.

démonstration : *Cherchons s'il existe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$. On a les équivalences :*

$$\Big((x+iy)^2 = a+ib\Big) \overset{\text{prop 2(i)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \pm \operatorname{signe}(b)\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}, \end{cases}$$

avec $\operatorname{signe}(b) = \begin{cases} 1 & \textit{si} \quad b > 0 \\ 0 & \textit{si} \quad b = 0 \\ -1 & \textit{si} \quad b < 0 \end{cases}$ *. Le résultat s'en déduit alors.* ∎

Théorème 2 : Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ (avec $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Alors l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

admet deux solutions dans $\mathbb{C}$, données par :

(i) Si $\Delta = 0$, $z_1 = z_2 = \dfrac{b}{2a}$;

(ii) Si $\Delta \neq 0$, alors

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est tel que $\delta^2 = \Delta$.

démonstration :

$$(E) \Leftrightarrow a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left(z - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

Si $\Delta = 0$, alors $\delta = 0$ et $z_1 = z_2 = \frac{b}{2a}$. Sinon, le lemme assure que δ tel que $\delta^2 = \Delta$ existe, et dès lors, on a :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \textit{et} \qquad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

∎

Théorème 3 (fondamental de l'algèbre, ou de d'Alembert) : Toute fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicités).

démonstration *: On rappelle le théorème de Liouville et le vocabulaire qui va avec :*

Théorème de Liouville : Toute fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique et bornée est constante.
Analytique : $\forall\, z_0 \in \mathbb{C}, f(z) = \sum a_k(z-z_0)^k$.
Bornée : $\exists\, M > 0 \mid |f(z)| < M\ (\forall\, z)$.

Montrons que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une racine. Supposons pour cela que P n'admette aucun racines et considérons la fonction $f = 1/P$. f est analytique et clairement bornée car $|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0 \Rightarrow f$ est constante. On note alors $f(z) = C$, ce qui implique $P \equiv \frac{1}{C} \rightarrow$ absurde, car $\deg(P) \geqslant 1$. D'où P admet au moins une racine z_0. Par suite, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(z) = (z-z_0)\,Q(z)$, et on réitère ce raisonnement au polynôme Q vérifiant $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Au final, P admet n racines (avec éventuellement égalités de plusieurs d'entre elles). ■

`Remarque 3` : Si temps, poursuive avec module et argument, interprétation géométrique (cf. leçon n° 17).

Autres constructions possibles :

1. La construction donnée ici est historique, et il en existe d'autres. Par exemple, on considère $\mathbb{R}[X]$, $P(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[X]$ et $I = \{PQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Alors on a le théorème suivant :

   Théorème : $\mathbb{R}[X]/I$ est un corps commutatif pour $+$ et $\times$. On note $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/I$.

   Pour justifier la notation, on montre que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]/I) = 2$, et $x^2 = (x^2+1)\cdot 1 + (-1)$, donc $[x^2] = [x]^2 = -1$ (où $[x]$ désigne la classe de x), donc $[x]$ se comporte exactement comme i.

2. Les seuls automorphismes φ de $\mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ soit $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sont $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ ou la conjuguaison. En effet, $\big(\varphi(i)\big)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$, donc $\varphi(i) = \pm i$. Soit alors $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
   – Si $\varphi(i) = i$, $\varphi(a+ib) = \varphi(a) + \varphi(i)\varphi(b) = a + ib \Rightarrow \varphi \equiv \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$;
   – Si $\varphi(i) = i$, $\varphi(a+ib) = \varphi(a) + \varphi(i)\varphi(b) = a - ib \Rightarrow \varphi \equiv$ conjuguaison.

   Réciproquement, on vérifie que la conjuguaison et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ sont des automorphismes de $\mathbb{C}$.