

LEÇON N° 28 :

Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation, ...).

Pré-requis :

- Structure d'espace affine ;
- Produits scalaire et vectoriel ;
- Sommes directes ;
- Théorèmes de Thalès et de Pythagore.

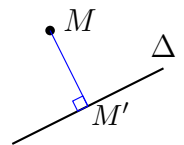
On se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} , d'espace vectoriel associé $\vec{\mathcal{P}}$ (\mathcal{P} est donc muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base \mathcal{B}).

28.1 Définitions et propriétés

Définition 1 : Soient Δ une droite de \mathcal{P} . On appelle *projection orthogonale sur Δ* l'application

$$\begin{aligned} p_{\Delta} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M', \end{aligned}$$

où M' est l'intersection de Δ avec sa perpendiculaire passant par M . On note $M' = p_{\Delta}(M)$ et M' est appelé *projecté orthogonal de M sur Δ* .



Proposition 1 :

- (i) Toute droite Δ du plan est laissée invariante par p_{Δ} ;
- (ii) p_{Δ} est idempotente : $p_{\Delta} \circ p_{\Delta} = p_{\Delta}$;
- (iii) p_{Δ} n'est ni surjective, ni injective.

démonstration :

- (i) Soit $M \in \Delta$. Notons Δ_M^{\perp} la perpendiculaire à Δ passant par M . Alors $M' = \Delta \cap \Delta_M^{\perp} = M$, d'où $M = p_{\Delta}(M)$ et par suite $\Delta = p_{\Delta}(\Delta)$.
- (ii) Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $p_{\Delta} \circ p_{\Delta}(M) = p_{\Delta}(M')$, où $M' \in \Delta$. D'après (i), $M' = p_{\Delta}(M')$, donc $p_{\Delta} \circ p_{\Delta}(M) = M' = p_{\Delta}(M)$.
- (iii) Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $p_{\Delta}^{-1}(M) = \emptyset$ si $M \notin \Delta$, donc p_{Δ} n'est pas surjective. De plus, si $M \in \Delta$, alors $p_{\Delta}^{-1}(M) \in \Delta_M^{\perp}$, d'où p_{Δ} n'est pas injective. ■

Théorème 1 : Soient \mathcal{D} et Δ deux droites distinctes de \mathcal{P} . Alors :

- (i) Si $\mathcal{D} \not\perp \Delta$, alors $p_\Delta(\mathcal{D}) = \Delta$;
- (ii) Si $\mathcal{D} \perp \Delta$, alors $p_\Delta(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \cap \Delta$.

démonstration :

(i) Montrons la double inclusion :

" \subset " : Soit $M \in \mathcal{D}$. Par définition, $p_\Delta(M) \in \Delta$, donc $p_\Delta(\mathcal{D}) \subset \Delta$.

" \supset " : Soit $M' \in \Delta$. Il existe une unique droite perpendiculaire à Δ passant par M' (axiomes d'Euclide). Posons M l'intersection de cette droite avec \mathcal{D} (ce point est défini de manière unique, car cette droite et \mathcal{D} ne sont pas parallèles), de sorte que $p_\Delta(M) = M'$. Donc $M' \in p_\Delta(\mathcal{D})$, d'où $\Delta \subset p_\Delta(\mathcal{D})$.

(ii) Soit H le point d'intersection de \mathcal{D} et Δ . Pour tout $M \in \mathcal{D}$, $(HM) \perp \Delta$ (car H et M se trouvent tous deux sur \mathcal{D}), donc puisque $H \in \Delta$, on a que pour tout $M \in \mathcal{D}$, $p_\Delta(M) = H$. ■

28.2 Projection vectorielle associée

Soit $\vec{\mathcal{D}}$ une droite de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors $\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} \oplus \vec{\mathcal{D}}^\perp$, et tout vecteur $\vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}$ sera systématiquement décomposé en $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, où $\vec{u}_1 \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\vec{u}_2 \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$, cette décomposition étant unique. On primera les images par $p_{\vec{\mathcal{D}}}$.

Théorème 2 : L'application

$$\begin{array}{ccc} \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}} : \vec{\mathcal{P}} & \longrightarrow & \vec{\mathcal{P}} \\ & & \vec{u} \longmapsto \vec{u}_1 \end{array}$$

est linéaire. C'est l'application vectorielle associée à $p_{\vec{\mathcal{D}}}$.

démonstration : Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\lambda\vec{u}) = \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\lambda\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2) = \lambda\vec{u}_1 = \lambda\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\vec{u}),$$

et

$$\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\vec{u}) + \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\vec{v}).$$

Enfin, pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, on a

$$\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{MN}) = \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\underbrace{\overrightarrow{MM'}}_{\in \vec{\mathcal{D}}^\perp} + \underbrace{\overrightarrow{M'N'}}_{\in \vec{\mathcal{D}}} + \underbrace{\overrightarrow{N'N}}_{\in \vec{\mathcal{D}}^\perp}) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{p_{\vec{\mathcal{D}}}(M)p_{\vec{\mathcal{D}}}(N)}.$$

Montrons encore l'indépendance vis-à-vis du représentant choisi : soient $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$, où $\overrightarrow{U} \in \vec{\mathcal{D}}$ et $\overrightarrow{V} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$. Alors $\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{U} = \vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{MN})$. ■

Conséquences :

- ◇ Pour tous $M, N \in \mathcal{P}$, $\vec{p}_{\vec{\mathcal{D}}}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{p_{\vec{\mathcal{D}}}(M)p_{\vec{\mathcal{D}}}(N)}$;
- ◇ $p_{\vec{\mathcal{D}}}$ est affine ; en particulier, elle conserve le barycentre. Elle transforme une droite (resp. segment) en une droite (resp. segment) ou un point.

Le théorème suivant est une propriété caractéristique de la projection orthogonale.

28.3 Distance d'un point à une droite

Théorème 3 : Soient $M \in \mathcal{P}$, Δ une droite de \mathcal{P} et $M' = p_{\Delta}(M)$. Alors

$$\forall N \in \Delta \setminus \{M'\}, \quad MM' < MN. \quad (\star)$$

De plus, p_{Δ} est la seule application qui vérifie (\star) .

démonstration : Le triangle $MM'N$ est rectangle en M' . Le théorème de Pythagore nous assure donc que $MN^2 = MM'^2 + M'N^2 > MM'^2$ car $N \neq M'$. Puisque c'est une inégalité de distances au carré, on a bien $MM' < MN$.

Soit alors $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ (avec $\text{Im}(f) = \mathcal{P}$) vérifiant (\star) . Supposons qu'il existe $M \in \mathcal{P}$ tel que $f(M) \neq p_{\Delta}(M)$ ($= M'$). Si l'on applique (\star) à f et p_{Δ} , on obtient $Mp_{\Delta}(M) < Mf(M)$ (car $f(M) \in \Delta$) et $Mf(M) < Mp_{\Delta}(M)$ (car $p_{\Delta}(M) \in \Delta$). On aboutit à une absurdité prouvant que $f(M) = M'$, donc $f = p_{\Delta}$, et p_{Δ} est bien unique. ■

Définition 2 : Soient $M \in \mathcal{P}$ et Δ une droite de \mathcal{P} . On appelle *distance de M à Δ* le réel positif noté $d(M, \Delta)$ égal à MM' , où $M' = p_{\Delta}(M)$.

Remarque 1 : D'après le théorème 3, $d(M, \Delta) = \inf\{MN, N \in \Delta\} = MM'$.

28.4 Applications

28.4.1 Calculs d'angles

Soit ABC un triangle en A^1 . On primera les images des points par la projection orthogonale sur (AB) . On a alors :

◇ $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{B}$. Or $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot (\vec{BC}' + \vec{C}'\vec{C}) = \vec{BA} \cdot \vec{BC}'$ et $C' = A$ (ABC rectangle en A) impliquent que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = AB^2$. De ces deux expressions vient

$$AB^2 = AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}.$$

◇ $\|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\| = BA \cdot BC \cdot \sin \widehat{B} = \|\vec{BA} \wedge (\vec{BA} + \vec{AC})\| = \|\vec{BA} \wedge \vec{AC}\| = BA \cdot AC \cdot \sin \widehat{A} = AB \cdot AC$.
D'où

$$\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}.$$

On retrouve ainsi les formules :

$$\cos = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad \text{et} \quad \sin = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

¹ : Les angles géométriques \widehat{B} et \widehat{C} sont donc aigus, et leur cosinus et sinus sont donc tous deux positifs.

28.4.2 Optimisation

Exercice 1 : Soient A, B deux points distincts de \mathcal{P} , et Δ une droite de \mathcal{P} . Trouver le point M de Δ tel que $MA^2 + MB^2$ soit minimal.

Montrons d'abord la formule de la médiane : si $A, B, M \in \mathcal{P}$ et I milieu de $[AB]$, alors

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

démonstration : On a :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + \overrightarrow{MI}^2 \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}} + IA^2 + IB^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Il devient alors clair que pour que $MA^2 + MB^2$ soit minimal, il faut que MI^2 le soit, condition remplie dès lors que $M = p_{\Delta}(I)$ (théorème 3). ◇

Exercice 2 : Montrer que le minimum de $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$ est atteint au centre de gravité G du triangle ABC , puis calculer ce minimum en fonctions des longueurs $a = BC, b = AC$ et $c = AB$ des côtés du triangle.

$f(M) = AB^2/2 + 2MI^2 + MC^2 = AB^2/2 + g(M)$ avec $g(M) = 2MI^2 + MC^2$ (formule de la médiane). Soit H le projeté orthogonal de M sur (IC) . Alors $g(M) = 3MH^2 + 2HI^2 + HC^2 = 2MH^2 + 2(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GI})^2 + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC})^2 = 3MG^2 + g(G)$, qui est donc minimum pour $H = G$. ◇

Introduction possible

Définition : Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors on dit qu'ils sont *orthogonaux*, et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' de \mathcal{P} sont dites *orthogonales* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. On note alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$.

Proposition : Soient $\vec{u}(\alpha, \beta)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta')$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \alpha\alpha' - \beta\beta' = 0.$$

démonstration : On a que :

$$\begin{aligned} \vec{u} \perp \vec{v} &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha'^2 + \beta'^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\alpha\alpha' + \beta\beta') = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème : Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} . Alors :

- (i) Par tout point M de \mathcal{P} passe une unique droite orthogonale à \mathcal{D} ;
- (ii) Deux droites orthogonales sont sécantes ;
- (iii) Deux droites orthogonales à \mathcal{D} sont parallèles.

démonstration : La droite \mathcal{D} est de vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

(i) Toute droite \mathcal{D}' orthogonale à \mathcal{D} admet un vecteur directeur $\vec{v}(a, b)$ vérifiant $a\alpha + b\beta = 0$.
L'unicité est assurée du fait qu'il ne passe par un point qu'une droite de vecteur directeur donné.

(ii)-(iii) Par définition (utiliser la réciproque du théorème de Thalès).

