

LEÇON N° 38 :

Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit, ...).

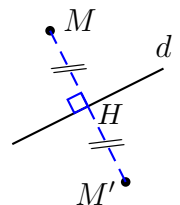
Pré-requis :

- Angles orientés de vecteurs, mesurés modulo 2π ;
- Relation de Chasles, projection orthogonale ;
- Définition d'une isométrie, produit scalaire.

On se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} orientés.

38.1 Réflexion et médiatrice

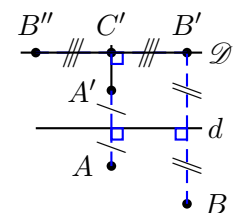
Définition 1 : Soient d une droite de \mathcal{P} , M un point de \mathcal{P} et H le projeté orthogonal de M sur d . On appelle *réflexion d'axe d* l'application $s_d : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} : M \mapsto M'$, où M' est tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$.



Proposition 1 : Une réflexion est involutive et c'est une isométrie.

démonstration : Puisque $s_d(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$, on a en particulier que $(MM') \perp d$, et H est aussi le projeté orthogonal de M' sur d car $H \in d$ et M, H, M' sont alignés. D'où $s_d(M') = M''$ tel que $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'H} = 2\overrightarrow{M'M} + 2\overrightarrow{MH} = 4\overrightarrow{HM} + 2\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \overrightarrow{M''M'} = 2\overrightarrow{MH} \Leftrightarrow M'' = M$, donc $s_d \circ s_d$ est l'identité, et s_d est bien involutive.

Sur la figure ci-contre, on considère deux points A et B situés hors d'une droite d , leurs symétriques A' et B' par rapport à cette droite, \mathcal{D} la droite parallèle à d passant par B' , C' le point d'intersection de (AA') et \mathcal{D} , et B'' le symétrique de B par rapport à (AC') . On note encore H_A et H_B les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur d .



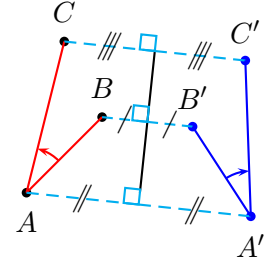
Puisque $\mathcal{D} \parallel d$ et $(AC') = (AA') \perp d$, on sait que $(AC') \perp \mathcal{D}$. Enfin, puisque $B' \in \mathcal{D}$, on en déduit que le triangle $A'B'C'$ est rectangle en C' . Le symétrique B'' est donc sur $(B'C) = \mathcal{D}$, on en déduit que C est le milieu de $[B'B'']$. Puisque $(A'C) \perp \mathcal{D}$, $(A'C)$ est la médiatrice de $[B'B'']$, d'où $A'B' = A'B''$.

Par hypothèses, d et \mathcal{D} sont parallèles, H_B est le milieu de $[BB']$ et $H_A H_B = B'C' = B''C'$, donc la réciproque du théorème des milieux nous permet d'affirmer que H_A est le milieu de $[BB'']$. De plus, H_A est aussi le milieu de $[AA']$, donc le quadrilatère $ABA'B''$ est un parallélogramme, d'où $\overrightarrow{A'B''} = \overrightarrow{BA}$. Par conséquent, $A'B' = A'B'' = AB$, et le résultat est démontré. ■

Proposition 2 : Une réflexion échange les angles orientés en leurs opposés.

démonstration : Soient A, B, C trois points distincts de \mathcal{P} . On primera les images des points par la réflexion considérée. Alors par la relation de Chasles, on trouve que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}) + (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{AB}) [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB}) [2\pi] \\ &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BA}) [2\pi] \\ &= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) - (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) [2\pi] \\ &= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) [2\pi] \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= -(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) [\pi]. \end{aligned}$$



La formule d'Al-Kashi appliquée aux deux triangles ABC et $A'B'C'$ (dont les côtés ont même mesure puisqu'une réflexion est une isométrie) nous permet de voir que les angles géométriques \hat{A} et \hat{A}' sont les mêmes (ils ont même cosinus). L'égalité modulo π devient alors une égalité modulo 2π (sinon l'un des angles pourrait être aigu et l'autre obtu), et le résultat s'en trouve démontré. ■

Théorème 1 : Soient $A, B \in \mathcal{P}$ distincts. Alors il existe une unique droite Δ telle que la réflexion par rapport à Δ échange A en B . Donc $\Delta \perp (AB)$ et Δ est appelée médiatrice de $[AB]$.

démonstration :

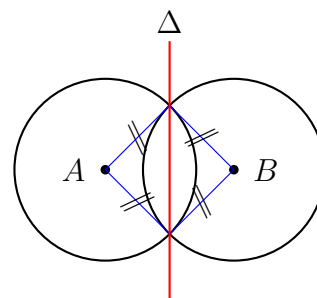
Soit Δ une telle droite. Par définition d'une réflexion, $\Delta \parallel (AB)$ et $\Delta \ni I$, milieu de $[AB]$ (puisque $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ et I est le projeté orthogonal de A sur Δ), donc Δ est la perpendiculaire à (AB) passant par I . Réciproquement, la perpendiculaire à (AB) passant par I est bien un axe de réflexion échangeant A et B . ■

38.2 Régionnement associé

Théorème 2 : Δ (médiatrice de $[AB]$) est l'ensemble des points équidistants de A et B .

démonstration : Soit M un point vérifiant $MA = MB$. Alors $MA^2 = MB^2$, donc $MA^2 - MB^2 = 0$, qui est équivalent à $0 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI})$ avec I milieu de $[AB]$. Donc (produit scalaire) $(AB) \perp (MI)$, et d'après le théorème précédent, la seule droite perpendiculaire à (AB) passant par I est Δ , donc $M \in \Delta$. Réciproquement, si $M \in \Delta$, on a $AM = s_\Delta(A)s_\Delta(M) = BM$. ■

Conséquence : Cela fournit un procédé de construction de la médiatrice de'un segment $[AB]$: en effet, si l'on trace deux cercles de centres A et B ayant un même rayon suffisamment grand pour qu'il se croisent, les deux points d'intersection en question sont sur Δ , d'où Δ !



Définition 2 : On appelle \mathcal{P}_A (resp. \mathcal{P}_B) le demi-plan ouvert de frontière Δ contenant A (resp. B).

Théorème 3 :

- (i) $\{M \in \mathcal{P} \mid MA < MB\} = \mathcal{P}_A$;
- (ii) $\{M \in \mathcal{P} \mid MA > MB\} = \mathcal{P}_B$;
- (iii) $\{M \in \mathcal{P} \mid MA = MB\} = \Delta$.

démonstration :

(i)-(ii) Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB) et I le milieu de $[AB]$. Alors $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI}) = 2\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH}$ car A, B, I, H sont alignés et $(AB) \perp (HM)$. Il vient donc que $MA < MB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} < 0 \Leftrightarrow H \in]IA[\Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_A$ et on montre de même que $MA > MB \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}_B$.

(iii) cf. théorème 2. ■

38.3 Application

38.3.1 Au triangle

Proposition 3 : Soient ABC un triangle, I (resp. J) le milieu de $[AB]$ (resp. $[AC]$). Alors $(IJ) \parallel (BC)$.

démonstration : Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) . Le triangle AHC est rectangle en H , donc $AJ = JC = JH$ (en effet, si K désigne le symétrique de H par rapport à J , $AHCK$ est un rectangle et donc ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu J). Donc J est sur la médiatrice de $[AH]$. On montre de la même manière que I y est aussi. Cette médiatrice n'est donc autre que la droite (IJ) , donc perpendiculaire à (AH) qui est elle-même perpendiculaire à (BC) . D'où le résultat. ■

Proposition 4 : Les trois médiatrices d'un triangle non plat sont concourantes en un point.

démonstration : Soit ABC un triangle non plat. Les médiatrices Δ de $[AB]$ et Δ' de $[AC]$ sont concourantes en un point O , car $(AB) \parallel (AC)$. Alors $O \in \Delta \Rightarrow OA = OB$ et $O \in \Delta' \Rightarrow OA = OC$. On en déduit que $\{O\} = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow OB = OC \Rightarrow O \in \Delta''$, où Δ'' est la médiatrice de $[BC]$. ■

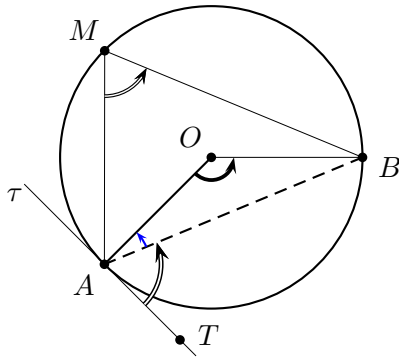
Conséquence : On peut construire le cercle passant par trois points non alignés A, B et C en traçant les médiatrices de $[AB], [AC]$ et $[BC]$. Leur intersection donne le centre de ce cercle.

38.3.2 Au cercle

Théorème 4 (théorème de l'angle inscrit) : Soient M, A, B trois points distincts d'un cercle de centre O , et $T \neq A$ un point de la tangente en A . Alors

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}.$$

démonstration :



Considérons les médiatrices Δ de $[MA]$ et Δ' de $[MB]$. Puisqu'une réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé, nous avons, nous avons par application des réflexions d'axe Δ et Δ' :

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}) = -(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}) \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = -(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}).$$

Ainsi, par la relation de Chasles, nous avons

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) &= (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi} \\ &= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi} \\ &= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + 2(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi} \\ &= 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

On a aussi $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) \pmod{2\pi}$, et puisque la somme des angles orientés du triangle isocèle AOB est égale à π , on a $2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \pmod{2\pi}$, d'où

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \pi + 2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OB}) = \pi + \pi - (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

■

Corollaire 1 : Soient quatre points A, B, C, D du plan \mathcal{P} distincts. Ils sont alignés ou cocycliques si et seulement si

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}.$$

démonstration :

" \Rightarrow ": Si alignés, l'égalité est immédiate. Supposons alors A, B, C, D cocycliques et notons O le centre du cercle obtenu. Alors le théorème 1 nous assure que

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi},$$

D'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}$.

" \Leftarrow ": Notons α la mesure principale de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, de sorte que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \alpha \pmod{\pi}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \alpha \pmod{\pi}$. D'où $C, D \in \Gamma_{\pi}^{\alpha}$ (cf. leçon n° 31) et donc, par la proposition 1, $C, D \in (AB)$ si $\alpha = 0 \pmod{\pi}$ et les quatre points sont alignés, ou alors $C, D \in \mathcal{C}$ avec \mathcal{C} cercle passant par A et B , et les quatre points sont cocycliques. ■

On pourra donner en applications complémentaires la droite de Simpson et le point de Miquel, que nous trouverons en leçon n° 31, ou encore l'exercice suivant :

Exercice : Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites concourantes. Trouver un triangle ABC tel que ces trois droites en soient les médiatrices.

Convenons tout d'abord $\vec{u} = \overrightarrow{OA}/\|OA\|$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA_1}/\|OA_1\|$ (ce qui implique d'ailleurs que $-\vec{v} = \overrightarrow{OA_2}/\|OA_2\|$ par construction de A_1 et A_2).

1. Puisqu'on sait grâce à la proposition 4 que les trois sommets du triangle se trouvent sur un même cercle dont le centre est l'intersection commune des trois médiatrices, que l'on note O , on construit un cercle de centre O et de rayon quelconque.
2. Nous construirons A, B et C tels que Δ_1 soit la médiatrice de $[AB]$, Δ_2 celle de $[BC]$ et donc Δ_3 celle de $[AC]$. Soit $f = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}$. Dans ce cas, on a

$$f(A) = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}(A) = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2}(C) = s_{\Delta_1}(B) = A,$$

et puisque $f(O) = O$ et $f(B) \neq B$, on en déduit que $f = s_{(OA)}$.

3. Soit alors $M \in \mathcal{P}$. Nous allons construire $M' = f(M) = s_{\Delta_1} \circ s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_3}(M)$. D'après ce qui précède, (OA) est la médiatrice de $[MM']$. Après construction de M' (à partir d'un point M choisi dans le plan), on obtient donc (OA) .
4. Puisque $A \in (OA)$ et $A \in \mathcal{C}$, on en déduit $A : \mathcal{C} \cap (OA) = \{A\}$. Les points B et C s'en déduisent.

On peut remarquer que pour chaque rayon choisi, il y a 2 choix pour le point A . Mais l'infinité de rayons possible impliquent que ce problème a une infinité de solutions. ◇

Illustrons tout de même cet exercice :

