

LEÇON N° 39 :

Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangente à un cercle, ...).

Pré-requis :

- Géométrie affine et vectorielle ;
- Médiatrice, barycentre ;
- Projection orthogonale, réflexion : définitions et propriétés.

On se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} (les angles orientés sont inutiles). Au collège, la bissectrice d'un angle géométrique est définie comme étant un axe de symétrie.

39.1 Réflexions et bissectrices

39.1.1 Bissectrices de deux droites

Théorème 1 : Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites de \mathcal{P} sécantes en un point O . Il existe exactement deux réflexions échangeant \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Leurs axes sont perpendiculaires et passent par O .

démonstration :

Analyse : Soit Δ une droite telle que $s_{\Delta}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. Puisque $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{O\}$, $s_{\Delta}(\{O\}) = s_{\Delta}(\mathcal{D} \cap \mathcal{D}') = s_{\Delta}(\mathcal{D}) \cap s_{\Delta}(\mathcal{D}') = \mathcal{D}' \cap \mathcal{D} = \{O\}$. Soient alors $A \in \mathcal{D}$ différent de O et A' son image par s_{Δ} . Alors $OA = OA'$, de sorte que $A' \in \mathcal{D}' \cap \mathcal{C}(O, OA)$. D'où deux points possibles, notés A_1 et A_2 . On pose alors Δ_1 (resp. Δ_2) la médiatrice de $[AA_1]$ (resp. $[AA_2]$).

Synthèse : $s_{\Delta_1}(O) = O$ et $s_{\Delta_1}(A) = A_1$ impliquent $s_{\Delta_1}(\mathcal{D}) = s_{\Delta_1}(OA) = (OA') = \mathcal{D}'$, et l'on montre de même que $s_{\Delta_2}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. De plus, $[AA_2]$ est un diamètre du cercle \mathcal{C} défini plus haut, contenant A_1 , donc le triangle A_1AA_2 est rectangle en A . Or $(AA_1) \perp \Delta_1$ et $(AA_2) \perp \Delta_2$, donc $\Delta_1 \perp \Delta_2$. ■

Exercice : Montrer que si \vec{u} et \vec{v} sont respectivement des vecteurs unitaires de \mathcal{D} et \mathcal{D}' , alors les axes de symétrie sont dirigés par $\vec{u} \pm \vec{v}$.

Convenons tout d'abord $\vec{u} = \overrightarrow{OA}/\|\overrightarrow{OA}\|$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OA_1}/\|\overrightarrow{OA_1}\|$ (ce qui implique d'ailleurs que $-\vec{v} = \overrightarrow{OA_2}/\|\overrightarrow{OA_2}\|$ par construction de A_1 et A_2).

$\vec{u} + \vec{v}$: On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \overrightarrow{AA_1} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} + \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\|\overrightarrow{OA_1}\|} \right) = \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|} (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1}) \\ &= \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|} (\|\overrightarrow{OA_1}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2) = 0. \end{aligned}$$

$\vec{u} - \vec{v}$: On montre de même que :

$$\overrightarrow{AA_2} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{AA_2} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|} - \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\|\overrightarrow{OA_1}\|} \right) = \frac{1}{\|\overrightarrow{OA}\|} (\|\overrightarrow{OA_2}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2) = 0.$$

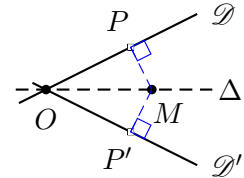
Dans ces égalités, nous avons évidemment utilisé le fait que $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OA_1}\| = \|\overrightarrow{OA_2}\|$. \diamond

Proposition 1 : $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \{M \in \mathcal{P} \mid d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')\}$.

démonstration :

" \subset " : Soit $M \in \Delta_1 \cup \Delta_2$. Si $M = O$, alors il est évident que $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') = 0$. Supposons alors $M \neq O$.

On peut considérer $M \in \Delta_1$. Soient P le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} , de sorte que $d(M, \mathcal{D}) = MP$, et $P' = s_{\Delta_1}(P)$. Alors $P' \in \mathcal{D}'$ et $MP = MP'$ (en effet, $s_{\Delta_1}(M) = M$). Par suite, $s_{\Delta_1}(MP) = (MP')$, et puisque s_{Δ_1} conserve l'orthogonalité, on a l'implication $\mathcal{D} \perp (MP) \Rightarrow \mathcal{D}' \perp (MP')$, donc P' est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D}' et réalise donc le minimum de la distance de M à la droite \mathcal{D}' , c'est-à-dire $MP' = d(M, \mathcal{D}')$.



" \supset " : Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}')$. Soient P (resp. P') le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}') et d la médiatrice de $[PP']$. Alors $M \in d$ car $d(M, \mathcal{D}) = d(M, \mathcal{D}') \Leftrightarrow MP = MP'$. On en déduit que $s_d(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$, donc d est l'une des deux bissectrices Δ_1 ou Δ_2 . \blacksquare

39.1.2 Réflexion de demi-droites

Définition 2 : Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites sécantes en un point O , $A \in \mathcal{D}$ et $B \in \mathcal{D}'$ deux points distincts de O . On appelle *bissectrice intérieure de l'angle \widehat{AOB}* la droite notée Δ_1 telle que $s_{\Delta_1}([OA]) = [OB]$. La droite Δ_2 , perpendiculaire à Δ_1 passant par O est alors appelée *bissectrice extérieure de l'angle \widehat{AOB}* .

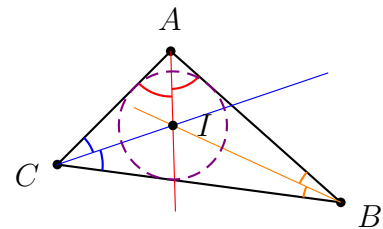
Remarque 1 : Si \vec{u} et \vec{v} sont respectivement des vecteurs directeurs des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' , alors Δ_1 (resp. Δ_2) est dirigée par $\vec{u} + \vec{v}$ (resp. $\vec{u} - \vec{v}$).

39.2 Application au triangle et au cercle

39.2.1 Cercle inscrit et exinscrit

Définition 3 : Soit ABC un triangle non plat de \mathcal{P} . Les bissectrices intérieures (resp. extérieures) du triangle ABC sont les bissectrices intérieures (resp. extérieures) des angles \widehat{BAC} , \widehat{ACB} et \widehat{CBA} .

Théorème 2 : Dans un triangle ABC non plat, les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point I , barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ (où $a = BC, b = AC$ et $c = AB$). C'est le centre du cercle inscrit au triangle.



démonstration : Soit I le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$ (on remarque que ABC non plat $\Rightarrow a + b + c \neq 0$). On a donc :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MI} = \frac{1}{a+b+c} (a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC})$$

$$\stackrel{M=A}{\Rightarrow} \overrightarrow{AI} \frac{1}{a+b+c} (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) = \frac{bc}{a+b+c} \underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right)}_{=: \vec{u}}.$$

Donc \overrightarrow{AI} et \vec{u} sont colinéaires. Mais \vec{u} est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure issue de l'angle \hat{A} , donc (AI) n'est autre que cette bissectrice. On procède de la même manière avec $M = B$ et $M = C$ pour en déduire que I est bien le point d'intersection des trois bissectrices intérieures.

Par ailleurs, en notant H (resp. K, L) le projeté orthogonal de I sur (BC) (resp. (AC) et (AB)), on montre que les triangles AIK et AII sont isométriques (en effet, il ont un côté en commun [sur la bissectrice issue de \hat{A}], un angle droit chacun et un autre angle identique [grâce à la bissectrice]), donc que $IK = IL$. De la même manière, on trouve $IL = IH$. Le cercle de centre I passant par ces trois points est défini de manière unique, et il est tangent aux trois côtés du triangle (par construction de H, K et L), donc c'est bien le cercle inscrit. ■

Théorème 3 : Soit ABC un triangle non plat. La bissectrice intérieure issue de \hat{A} (resp. \hat{B}, \hat{C}) et les bissectrices extérieures issues des deux autres angles sont concourantes en un point I_A (resp. I_B, I_C) qui est le centre du cercle exinscrit relatif au premier sommet. De plus, I_A est le barycentre du système $\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$ (resp. I_B est le barycentre du système $\{(A, a), (B, -b), (C, c)\}$, I_C est le barycentre du système $\{(A, a), (B, b), (C, -c)\}$).

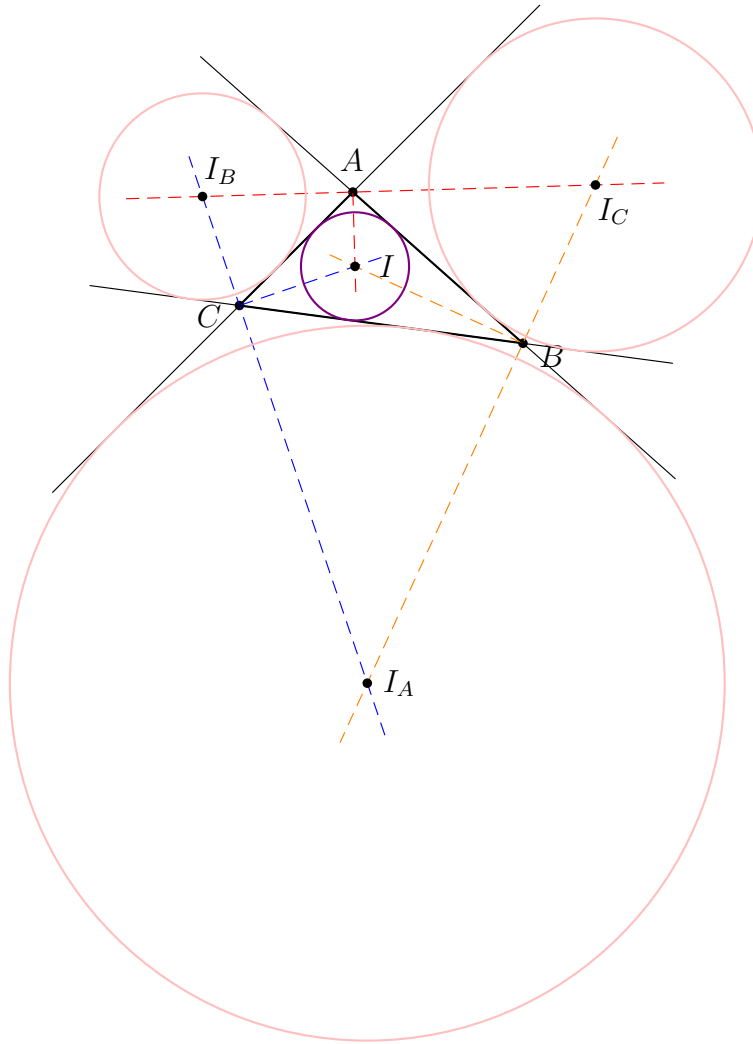
démonstration : Soit I le barycentre du système $\{(A, -a), (B, b), (C, c)\}$ (on remarque que ABC non plat $\Rightarrow b + c - a \neq 0$). On a donc :

$$\forall M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{MI} = \frac{1}{b+c-a} (-a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC})$$

$$\stackrel{M=A}{\Rightarrow} \overrightarrow{AI} \frac{1}{b+c-a} (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) = \frac{bc}{b+c-a} \underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \right)}_{=: \vec{u}}.$$

Donc \overrightarrow{AI} et \vec{u} sont colinéaires. Mais \vec{u} est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure issue de l'angle \hat{A} , donc (AI) n'est autre que cette bissectrice. Avec $M = B$ et $M = C$, on trouvera par ce calcul un signe $-$ dans la parenthèse, qui prouve que (BI) et (CI) sont les bissectrices extérieures. La conclusion quant au cercle se traite de la même manière que dans le théorème précédent. ■

Illustrons ceci par une figure :



Remarque 2 : I est l'orthocentre du triangle $I_A I_B I_C$. En effet, $(I_B I_C)$ est la bissectrice extérieure issue de \hat{A} et $(AI) \ni I_A$ sa bissectrice intérieure. Le théorème 1 nous assure qu'elles sont perpendiculaires, de sorte que I soit bien sur hauteur issue de I_A du triangle $I_A I_B I_C$. De même pour les autres côtés $I_A I_C$ et $I_A I_B$.

39.2.2 Tangente à un cercle

Proposition 2 : Soit $M \in \mathcal{P}$, extérieur à un cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ donné. Il y a exactement deux tangentes à \mathcal{C} passant par M . De plus, si l'on note T et T' les intersections avec \mathcal{C} , alors la droite (ΩM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{TMT'}$.

démonstration : La réflexion d'axe (ΩM) conserve le cercle, puisque cette droite porte un diamètre du cercle. Notons $T_1 = s_{(\Omega M)}(T) \in \mathcal{C}$. $(\Omega T) \perp (TM)$, donc par conservation de l'orthogonalité, on a $s_{(\Omega M)}(\Omega T) \perp s_{(\Omega M)}(TM) \Leftrightarrow (\Omega T_1) \perp (T_1 M)$. Or $T_1 \in \mathcal{C}$, donc $T_1 = T'$, et (ΩM) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{TMT'}$. ■

Remarque 3 : Pour mieux se représenter la chose, considérer que \mathcal{C} est le plus grand cercle de la figure page précédente, $\Omega = I_A$ et $M = A$. Alors $(\Omega M) = (AI_A)$ qui est bien la bissectrice intérieure de l'angle \hat{A} .

39.2.3 Rapport de longueur

Proposition 3 : Soient ABC un triangle non plat, I_A (resp. J_A) le pied de la bissectrice intérieure (resp. extérieure) issue de \hat{A} . Alors on a l'égalité

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BI_A}{CI_A} = \frac{BJ_A}{CJ_A}.$$

démonstration : Soit H_A le pied de la hauteur issue de A . Soient K et L (resp. K' et L') les projetés orthogonaux de I_A (resp. J_A) sur (AB) et (AC) (voir figure ci-dessous). On a alors que $KI_A = LI_A$ et $K'I_A = L'I_A$ (les triangles ALI_A et AKI_A sont isométriques, de même que les triangles $AK'I_A$ et $AL'I_A$). Alors d'une part

$$\frac{\mathcal{A}(ABI_A)}{\mathcal{A}(ACI_A)} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot KI_A}{\frac{1}{2} AC \cdot LI_A} = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(ABI_A)}{\mathcal{A}(ACI_A)} = \frac{\frac{1}{2} BI_A \cdot AH_A}{\frac{1}{2} CI_A \cdot AH_A} = \frac{BI_A}{CI_A}.$$

D'autre part,

$$\frac{\mathcal{A}(ABJ_A)}{\mathcal{A}(ACJ_A)} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot K'J_A}{\frac{1}{2} AC \cdot L'J_A} = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{A}(ABJ_A)}{\mathcal{A}(ACJ_A)} = \frac{\frac{1}{2} BJ_A \cdot AH_A}{\frac{1}{2} CJ_A \cdot AH_A} = \frac{BJ_A}{CJ_A}.$$

■

Voici la figure correspondante :

