

LEÇON N° 40 :

Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).

Pré-requis :

- Notions de groupes, groupes finis (table, ordre d'un élément) ;
- Isométries affines d'un plan \mathcal{P} (elles forment un groupe, elles conservent le barycentre et sont déterminées par trois points non alignés) ;
- Notions de déplacements (isométries positives) et d'antidéplacements (isométries négatives) ;
- Polygones convexes : définition et propriétés (en particulier, les sommets d'un polygone convexe P sont les seuls points de P à ne pas être milieux de deux autres points distincts de P).

On se place dans un plan affine euclidien orienté \mathcal{P} . On note Id l'identité sur \mathcal{P} , s_Δ la symétrie d'axe Δ , s_I la symétrie de centre I , et $r_{O,\alpha}$ la rotation de centre O et d'angle $\alpha \pmod{2\pi}$.

40.1 Généralités

Soient $A \subset \mathcal{P}$ et P un polygone convexe de centre O .

Théorème 1 : L'ensemble $\text{Is}(A)$ des isométries conservant A muni de la loi de composition \circ est un groupe.

démonstration : $\text{Id} \in \text{Is}(A)$, donc $\text{Is}(A) \neq \emptyset$. Soient $f, g \in \text{Is}(A)$. Il s'agit de montrer que $f \circ g^{-1} \in \text{Is}(A)$. Déjà, puisque les isométries du plan forment un groupe, $f \circ g$ est une isométrie. De plus, $f \circ g(A) = f(A) = A$. En composant par g^{-1} à droite, on trouve $f(A) = g^{-1}(A)$, c'est-à-dire $g^{-1}(A) = A$. Il s'en suit que $f \circ g^{-1}(A) = f(A) = A$, et $f \circ g^{-1} \in \text{Is}(A)$. On en déduit que $\text{Is}(A)$ est un sous-groupe des isométries du plan, c'est donc en particulier un groupe. ■

Proposition 1 : Soit f une isométrie conservant P . Alors f transforme tout sommet de P en sommet de P , et conserve l'isobarycentre de P .

démonstration : Les sommets de P sont les seuls points de P qui ne sont pas milieux de deux autres points distincts de P . Or toute isométrie conserve les barycentres, donc f envoie un sommet de P sur un sommet de P . Notons alors I l'isobarycentre de P . Alors $f(I)$ est l'isobarycentre des images des sommets de P , qui sont donc les sommets de P (puisque f conserve P), donc $f(I) = I$. ■

Conséquence : Si I désigne l'isobarycentre de P , les isométries conservant P sont nécessairement celles qui laissent I invariant : l'identité, les rotations de centre I ou les réflexions d'axe contenant I .

40.2 Cas du parallélogramme

Dans cette partie, P désigne un parallélogramme $ABCD$ de centre O (qui est aussi l'isobarycentre).

Théorème 2 : Le groupe des isométries conservant un parallélogramme (non carré, rectangle ou losange) est constitué de Id et s_O .

démonstration : D'après la conséquence ci-dessus, toute isométrie conservant P est soit l'identité, une rotation de centre O ou une symétrie d'axe contenant O .

Rotation : Par conservation des distances, $[OA]$ sera transformé en $[OA]$ ou $[OC]$, de sorte que l'image de A soit A ou C . Si c'est A , alors l'isométrie est l'identité. Si c'est C , alors l'isométrie est la symétrie de centre O s_O (rotation d'angle plat).

Réflexion : Son axe passe alors par O . Par conservation des distances, cette réflexion conserve $\{A, C\}$ et $\{B, D\}$, donc l'image de A est soit A ou C . Si c'est A , alors l'axe de symétrie est la droite (OA) et l'image de B est nécessairement D (car cette symétrie conserve P). Par suite, $(AC) \perp (BD)$, ce qui est absurde puisque P n'est pas un losange. Si c'est C , alors l'axe de symétrie est la médiatrice de $[AC]$. Or l'image de B est D , ce qui impliquerait (AC) et (BD) parallèles, ce qui est aussi absurde.

Réciproquement, Id et s_O conservent bien P , d'où le résultat. ■

40.3 Cas d'un losange

Théorème 3 : Le groupe des isométries conservant un losange P (non carré) est constitué de Id , s_O , $s_{(AC)}$ et $s_{(BD)}$.

démonstration : Un losange étant un parallélogramme particulier, le théorème précédent nous assure que Id et s_O conservent le losange P . Ce sont les seules rotations car sinon P serait un carré. De plus, si une réflexion conserve P , alors elle conserve ses diagonales (car P n'étant pas un carré, ses diagonales ne sont pas de même longueur) : les deux seules réflexions le permettant sont $s_{(AC)}$ et $s_{(BD)}$. Réciproquement, ces deux réflexions conservent bien le losange P . ■

40.4 Cas du rectangle

Théorème 4 : Le groupe des isométries conservant un rectangle P (non carré) est constitué de Id , s_O , s_{Δ} et $s_{\Delta'}$, où Δ et Δ' sont les deux médianes de P .

démonstration : Soient M, N, P, Q les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$, de sorte que $MNPQ$ soit un losange noté P' . D'après le théorème précédent, Id , s_O , $s_{(MP)}$ et $s_{(NQ)}$ conservent P' (O est aussi le centre de P' , et $[MP], [NQ]$ en sont les diagonales, donc les médianes Δ et Δ' de P).

Or toute isométrie conserve les milieux, donc $\text{Id}, s_O, s_{(MP)}s_{\Delta} = s_{(MP)}$ et $s_{\Delta'} = s_{(NQ)}$ conservent P .
Réciproquement, ces isométries conservent bien le rectangle P . ■

Conséquence : Le groupe des isométries conservant un rectangle et un losange (respectivement) sont isomorphes.

Remarques 1 :

1. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et le groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont les seuls groupes (à isomorphisme près) possédant quatre éléments.
2. Les groupes des isométries conservant un rectangle et un losange possèdent aussi quatre éléments d'ordre 2 (si f est un élément distinct de l'identité, $f^2 = \text{Id}$), ils sont donc isomorphes au groupe de Klein.

40.5 Cas du carré

Théorème 5 : Le groupe des isométries conservant un carré P est constitué de

$$\text{Id}, s_O, s_{\Delta}, s_{\Delta'}, s_{(AC)}, s_{(BD)}, r_{O, \frac{\pi}{2}} \text{ et } r_{O, -\frac{\pi}{2}},$$

où Δ et Δ' sont les deux médianes de P .

démonstration : Un carré étant à la fois un losange et un rectangle, les isométries $\text{Id}, s_O, s_{\Delta}, s_{\Delta'}, s_{(AC)}, s_{(BD)}$ conviennent. De plus, les réflexions échangeant ou conservant les diagonales, seules $s_{\Delta}, s_{\Delta'}, s_{(AC)}$ et $s_{(BD)}$ conviennent. Par contre, Id et s_O sont les seules rotations conservant les diagonales. Celles qui les échangent transforment A, B, C, D en B, C, D, A (ou D, A, B, C), c'est-à-dire $r_{O, \pm \frac{\pi}{2}}$. Réciproquement, toutes ces isométries conservent le carré. ■

Remarques 2 :

1. Ce groupe n'est pas abélien. En effet, $r_{O, -\frac{\pi}{2}} \circ s_{(AC)}(B) = A$ et $s_{(AC)} \circ r_{O, -\frac{\pi}{2}}(B) = C$.
2. En notant $r = r_{O, \frac{\pi}{2}}$ et $s = s_{(AC)}$, le groupe précédent s'écrit $\{\text{Id}, r, r^2, r^3, s, r \circ s, r^2 \circ s, r^3 \circ s\}$. On peut ainsi "généraliser" le résultat précédent aux polygones réguliers P_n à $n \geq 3$ côtés, de centre noté O :

On pose $r = r_{O, \frac{2\pi}{n}}$ et $s = s_{(OA)}$ où A est un sommet de P_n . Alors

$$\text{Is}(P_n) = \{\text{Id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, r \circ s, r^2 \circ s, \dots, r^{n-1} \circ s\}.$$

40.6 Divers

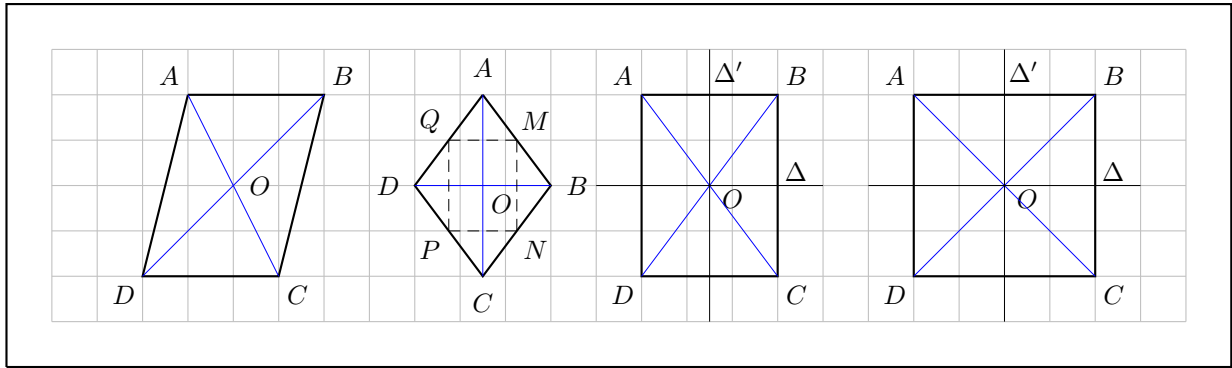
40.6.1 Un théorème utile

Théorème 6 : Si f est une isométrie telle que l'image d'un parallélogramme P est un parallélogramme P' , alors l'ensemble des isométries telles que l'image de P soit P' est

$$\{f \circ i, \quad i \in \text{Is}(P)\}.$$

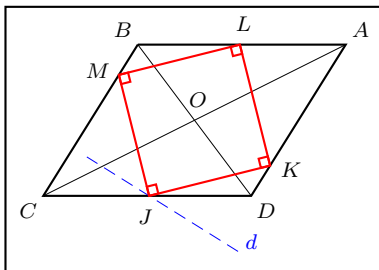
démonstration : Evident... ■

40.6.2 Illustrations des différents cas ci-dessus



40.6.3 Exercices

Exercice : Inscire un carré dans un parallélogramme donné.



Solution : $ABCD$ est un parallélogramme donné. S'il existe un carré $JKLM$ inscrit dans $ABCD$, et si O en est le centre, alors s_O envoie chaque sommet du carré sur le sommet opposé. Par conservation du barycentre, chaque côté de $ABCD$ est envoyé sur le côté opposé, donc O est aussi le centre de $ABCD$. Alors

$$J = r_{O, \frac{\pi}{2}}(M) \in (CD) \cap r_{O, \frac{\pi}{2}}((BC)).$$

Notons $d = r_{O, \frac{\pi}{2}}((BC))$. Les autres points s'en déduisent alors par $r_{O, \frac{\pi}{2}}$. Voyons encore pour quels parallélogrammes cette construction est possible :

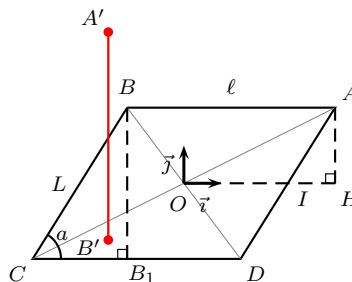
- ◇ Si $ABCD$ est un carré, alors $(CD) = d$ et J quelconque sur (CD) suffit à construire le carré recherché.
- ◇ Si $ABCD$ est un rectangle, alors (CD) et d sont parallèles, impliquant $(CD) \cap d = \emptyset$, donc la construction est impossible.
- ◇ Si $ABCD$ est un parallélogramme quelconque (non carré et non rectangle), alors (CD) et d se coupent en un unique point, qui apporte la solution recherchée, comme détaillée ci-dessus.

◇

Remarque 3 : Il existe des parallélogrammes pour lesquels les points du carré ne sont nécessairement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. La figure peut donc paraître trompeuse (voir page suivante pour une figure)...

Exercice : Suite à cette remarque, existe-t-il une condition telle que chaque sommet du carré soit sur un côté du parallélogramme (et non à l'extérieur) ?

Pour cette question un peu plus délicate, nous aurons besoin de certaines notations : soient a l'angle \widehat{BCD} , $L = BC = AD$ et $\ell = AB = CD$. Quitte à échanger les lettres du parallélogramme, on peut considérer que a est aigu et que $L \leq \ell$. On construit alors un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On note encore H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses, B_1 celui de B sur $[CD]$ (existe car a est aigu et $L \leq \ell$) et I le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[OH]$:



Nous notons enfin $\alpha_1 = \cos a$ et $\alpha_2 = \sin a$. Dans le triangle BB_1C , on a que

$$\alpha_2 = \frac{BB_1}{BC} \Leftrightarrow BB_1 = BC\alpha_2 = L\alpha_2 \Leftrightarrow AH = \frac{L}{2}\alpha_2.$$

De même, dans le triangle AIH , on a que

$$\alpha_1 = \frac{IH}{IA} \Leftrightarrow IH = IA\alpha_1 = \frac{L}{2}\alpha_1.$$

On en déduit les coordonnées des quatre points A, B, C et D :

$$A\left(\frac{\ell}{2} + \frac{L}{2}\alpha_1, \frac{L}{2}\alpha_2\right), B\left(-\frac{\ell}{2} + \frac{L}{2}\alpha_1, \frac{L}{2}\alpha_2\right), C\left(-\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\alpha_1, -\frac{L}{2}\alpha_2\right), D\left(\frac{\ell}{2} - \frac{L}{2}\alpha_1, -\frac{L}{2}\alpha_2\right).$$

Soient A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On détermine alors très facilement que

$$A'\left(-\frac{L}{2}\alpha_2, \frac{\ell}{2} + \frac{L}{2}\alpha_1\right) \quad \text{et} \quad B'\left(-\frac{L}{2}\alpha_2, -\frac{\ell}{2} + \frac{L}{2}\alpha_1\right).$$

D'après ce qui précède, le carré est totalement inscrit dans le parallélogramme si et seulement si les segments $[A'B']$ et $[BC]$ se coupent. Or

$$\begin{aligned} [A'B'] \cap [BC] = \emptyset &\Leftrightarrow \exists \Omega \mid \Omega \in [A'B'] \text{ et } \Omega \in [BC] \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid \Omega = \text{bar}\{(A', x), (B', 1-x)\} \text{ et } \Omega = \text{bar}\{(C, y), (D, 1-y)\} \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid \overrightarrow{O\Omega} = x\overrightarrow{OA'} + (1-x)\overrightarrow{OB'} \text{ et } \overrightarrow{O\Omega} = y\overrightarrow{OC} + (1-y)\overrightarrow{OD} \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid xA' + (1-x)B' = yC + (1-y)D \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid \begin{cases} xx_{A'} + (1-x)x_{B'} = yx_C + (1-y)x_D \\ xy_{A'} + (1-x)y_{B'} = yy_C + (1-y)y_D \end{cases} \\ &\quad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid \begin{cases} x(2L\alpha_1) = \ell + L\alpha_1 - L\alpha_2 \\ y(2\ell\alpha_1) = \ell\alpha_2 + \ell\alpha_1 - L \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists x, y \in [0, 1] \mid \begin{cases} x = \frac{1}{2} \frac{\ell + L\alpha_1 - L\alpha_2}{L\alpha_1} \\ y = \frac{1}{2} \frac{\ell\alpha_2 + \ell\alpha_1 - L}{\ell\alpha_1} \end{cases} \end{aligned}$$

Remarquons au passage que si $a = \frac{\pi}{2}$ (angle droit), ces deux équations se réduisent à $\ell - L = 0$, amenant une infinité de solutions si $\ell = L$ (cas du carré) et aucune solution si $\ell \neq L$ (cas du rectangle non carré).

Les conditions $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$ donnent respectivement :

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \ell + L\alpha_1 - L\alpha_2 \leq 2L\alpha_1 & 0 \leq y \leq 1 &\Leftrightarrow 0 \leq \ell\alpha_2 + \ell\alpha_1 - L \leq 2\ell\alpha_1 \\ \Leftrightarrow -\ell - L\alpha_1 \leq -L\alpha_2 \leq 2L\alpha_1 - \ell - L\alpha_1 & & \Leftrightarrow L - \ell\alpha_1 \leq \ell\alpha_2 \leq 2\ell\alpha_1 - \ell\alpha_1 + L & \\ \Leftrightarrow \ell - L\alpha_1 \leq L\alpha_2 \leq \ell + L\alpha_1. & & \Leftrightarrow L - \ell\alpha_1 \leq \ell\alpha_2 \leq L + \ell\alpha_1. & \end{aligned}$$

Ces deux nouvelles conditions peuvent être réduites à l'aide des hypothèses $L \leq \ell, \alpha_1 = \cos a \in [0, 1]$ et $\alpha_2 = \sin a \in [0, 1]$ (car a est aigu). En effet,

$$L\alpha_2 \leq \ell\alpha_2 \stackrel{0 \leq \alpha_2 \leq 1}{\leq} \ell \stackrel{\alpha_1 > 0}{\leq} \ell + L\alpha_1,$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1 \Rightarrow \ell(\alpha_1 + \alpha_2) \geq \ell \geq L \Rightarrow L - \ell\alpha_1 \leq \ell\alpha_2.$$

Les conditions sont donc réduites aux deux inégalités

$$\ell - L\alpha_1 \leq L\alpha_2 \quad \text{et} \quad \ell\alpha_2 \leq L + \ell\alpha_1.$$

Remarquons ensuite que

$$\alpha_2^2 - \alpha_1^2 < 1 \Leftrightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1) < 1 \stackrel{\alpha_1 + \alpha_2 > 0}{\Leftrightarrow} \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_1}.$$

Ce résultat nous permet de montrer que la première inégalité implique la seconde :

$$\begin{aligned}
 \ell - L\alpha_1 \leq L\alpha_2 &\Leftrightarrow \ell \leq L(\alpha_1 + \alpha_2) \\
 \alpha_1 + \alpha_2 > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \leq \frac{L}{\ell} \\
 &\Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 \leq \frac{L}{\ell} \\
 &\Leftrightarrow \ell(\alpha_2 - \alpha_1) \leq L \\
 &\Leftrightarrow \ell\alpha_2 \leq L + \ell\alpha_1.
 \end{aligned}$$

La condition pour que le carré soit inscrit dans le parallélogramme est donc finalement la suivante :

$$\ell - L \cos a \leq L \sin a.$$

◇

Figures :

