LEÇON N° 42 :

Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

Pré-requis :
– *Distances, produit scalaire, applications affines ;*
– *Réflexions, translations et rotations du plan (en particulier, décomposition des translations et rotations du plan en produit de réflexions) ;*
– *Relation de Chasles ;*
– *Notions de groupe.*

On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$, et $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ désigne le plan vectoriel associé.

42.1 Groupes des isométries du plan

42.1.1 Isométries du plan

Définition 1 : Une application $f : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ est une *isométrie de* $\mathscr{P}$ si pour tous $A, B \in \mathscr{P}$, on a $d\big(f(A), f(B)\big) = d(A, B)$ (on notera aussi pour simplifier $f(A)f(B) = AB$). On note $\mathrm{Is}(\mathscr{P})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{P}$.

Exemples : $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, les translations, les rotations, les réflexions sont des isométries.

42.1.2 Application vectorielle associée

Proposition 1 : Soit $f \in \mathrm{Id}(\mathscr{P})$. L'application définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : \overrightarrow{\mathscr{P}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \overrightarrow{MN} & \longmapsto & \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f(M)f(N)} \end{array}$$

est parfaitement définie, et indépendante du choix du représentant $\overrightarrow{MN}$.

démonstration *: L'application φ est clairement définie. Soit alors un autre représentant $\overrightarrow{mn} = \overrightarrow{MN}$, avec $m \neq M$. On veut montrer que $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(m)f(n)}$. Or $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{mn}$ équivaut à dire que $[Mn]$ et $[Nm]$ ont même milieu (en effet, la quadrilatère $MNnm$ est un parallélogramme). Introduisons alors un lemme :*

Lemme 1 *:* Toute isométrie de plan transforme le milieu d'un segment en le milieu du segment image.

> ***démonstration*** *: Soient A, B, C trois points alignés dans cet ordre. Alors $AC = AB + BC$. Soit $f' \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$, de sorte que $f'(A)f'(C) = f'(A)f'(B) + f'(B)f'(C)$, donc $f'(A), f'(B), f'(C)$ sont aussi alignés dans cet ordre. Si l'on suppose de plus que $AB = BC$ (donc B milieu de $[AC]$), il vient que $f'(A)f'(B) = f'(B)f'(C)$, et puisque $f'(A)$, $f'(B), f'(C)$ sont alignés dans cet ordre, $f'(B)$ est le milieu de $[f'(A)f'(C)]$.* ■

Par suite, $[f(M)f(n)]$ et $[f(N)f(m)]$ ont même milieu, et par conséquent, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{f(m)f(n)}$ car $f(M)f(N)f(n)f(m)$ est un parallélogramme. ■

`Remarque 1` : Le lemme nous assure que si $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$, alors f transforme une droite (resp. un segment) en une droite (resp. un segment de même longueur).

Définition 2 : L'application φ précédemment définie s'appelle *application vectorielle associée à f*.

Proposition 3 : Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ et φ son application vectorielle associée. Alors φ est bijective.

démonstration *:*

1. ***Montrons que φ conserve la norme des vecteurs*** *:* (P_1)
   $\forall\ (M, N) \in \mathscr{P}^2, \|\varphi(\overrightarrow{MN})\| = \|\overrightarrow{f(M)f(N)}\| = f(M)f(N) = MN = \|\overrightarrow{MN}\|$.
2. ***Montrons que f est semi-linéaire ($\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}, \varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v})$)*** *:*
   $\forall\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}, \exists\ A, B, C \in \mathscr{P} \mid \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. *Alors* $\varphi(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(\overrightarrow{AB}) + \varphi(\overrightarrow{BC}) = \varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v})$.
3. ***Montrons que φ est injective*** *:*
   Par 2., il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\overrightarrow{0}\}$. *Or* $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \|\varphi(\overrightarrow{AB})\| = 0 \overset{1.}{\Leftrightarrow} \|\overrightarrow{AB}\| = 0 \Rightarrow A = B$, *c'est-à-dire* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
4. ***Montrons que φ conserve le produit scalaire*** *:* (P_2)
   Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. *Alors* $\varphi(\overrightarrow{u}) \cdot \varphi(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}\left(\|\varphi(\overrightarrow{u}) + \varphi(\overrightarrow{v})\|^2 - \|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 - \|\varphi(\overrightarrow{v})\|^2\right) \overset{2.1.}{=} \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
5. ***Montrons que φ est linéaire*** *:* (P_3)
   Soient $\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. *Il reste à montrer que* $\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) = \lambda\varphi(\overrightarrow{u})$. *Or* $\|\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) - \lambda\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\varphi(\lambda\overrightarrow{u})\|^2 + \lambda^2\|\varphi(\overrightarrow{u})\|^2 - 2\lambda\,\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) \cdot \varphi(\overrightarrow{u}) \overset{1.4.}{=} \lambda^2\|\overrightarrow{u}\|^2 + \lambda^2\|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\lambda^2\|\overrightarrow{u}\|^2 = 0$, *donc* $\varphi(\lambda\overrightarrow{u}) - \lambda\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.
6. ***Montrons que φ est bijective*** *:*
   $\varphi : \overrightarrow{\mathscr{P}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{P}}$ *est un endomorphisme (5.) injectif (3.), et* $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie, donc* φ *est bijective.*

Ceci achève cette (laborieuse) démonstration. ■

`Remarques 2` : Soit f une isométrie du plan.
– $(P_2) \Rightarrow f$ conserve l'orthogonalité ;
– $(P_3) \Rightarrow f$ est affine et conserve le parallélisme.

Le point 6 aurait pu être démontré seul si l'on avait supposé dès le départ que f est une application affine, mais cette démonstration permet d'établir clairement ce résultat, et certains points démontrés seront utiles plus tard.

42.1.3 Propriétés des isométries affines

Théorème 1 : Toute isométrie affine du plan est bijective.

démonstration *: Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$. f est injective car pour tous $M, N \in \mathscr{P}$, $f(M) = f(N) \Rightarrow f(M)f(N) = 0 \Leftrightarrow MN = 0 \Leftrightarrow M = N$. Montrons que f est surjective. Soit $O \in \mathscr{P}$ arbitrairement fixé et $O' = f(O)$. Alors pour tout $M' \in \mathscr{P}$, il existe $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ tel que $\varphi(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{O'M'}$ car φ est surjective (proposition 3). Soit $M \in \mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. La définition de φ assure alors que $f(M) = M'$, donc pour tout $M' \in \mathscr{P}$, il existe $M \in \mathscr{P}$ tel que $f(M) = M'$.* ■

Théorème 2 : Toute isométrie affine du plan conserve le barycentre.

démonstration *: Soient $\{(A_i, a_i)_{i=1,\dots,n}\}$ un système de points pondérés tels que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, et G son barycentre. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi(\overrightarrow{GA_i}) \overset{(P_3)}{=} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \overrightarrow{GA_i}\right) = \varphi(\overrightarrow{0}) \overset{(P_3)}{=} \overrightarrow{0},$$

donc $f(G)$ est le barycentre du système $\big\{\big(f(A_i), a_i\big)_{i=1,\dots,n}\big\}$. ■

42.1.4 Structure de groupe

Théorème 3 : $\big(\mathrm{Is}(\mathscr{P}), \circ\big)$ est un groupe ($\circ$ = loi de composition).

démonstration *: $\mathrm{Is}(\mathscr{P}) \neq \varnothing$ car $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$. On montre que $\big(\mathrm{Is}(\mathscr{P}), \circ\big)$ est un sous-groupe des bijections du plan (grâce au théorème 1). Soient $M, N \in \mathscr{P}$, et $f, g \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$. Alors $g \circ f(M) g \circ f(N) = g\big(f(M)\big) g\big(f(N)\big) = f(M)f(N) = MN$, donc $g \circ f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$. De plus, f est bijective, donc $MN = f(M)f(N) \Rightarrow f^{-1}(M)f^{-1}(N) = f^{-1}\big(f(M)\big) f^{-1}\big(f(N)\big) = MN$, donc $f^{-1} \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$.* ■

42.2 Décomposition en produit de réflexions

Théorème 4 (de Cardan-Dieudonné en dimension 2) : Toute isométrie du plan est la composée d'au plus trois réflexions.

***démonstration** :*

1. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ admettant 3 points fixes A, B, C non alignés** :*
Soit $M \in \mathscr{P}$. Notons $M' = f(M)$, de sorte que $AM = AM'$, $BM' = BM$ et $CM = CM'$. Si $M \neq M'$, alors A, B, C sont sur la médiatrice de $[MM']$ donc sont en particulier alignés, ce qui est impossible. Donc $M' = M$ et $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$. Si Δ est une droite quelconque de $\mathscr{P}$, alors $\underline{f = s_\Delta \circ s_\Delta}$.
2. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ admettant au moins deux points fixes A, B, mais pas trois non alignés** :*
Soit $C \notin (AB)$ et $C' = f(C)$. Alors $C' \neq C$. Or $AC = AC'$ et $BC = BC'$, donc (AB) est la médiatrice de $[CC']$, et il vient que C' est l'(image de C par la réflexion d'axe (AB), notée $s_{(AB)}$. Or $s_{(AB)}$ est une isométrie, donc $s_{(AB)} \circ f$ aussi (théorème 3), et cette dernière transforme respectivement A, B, C en A, B, C, c'est donc l'identité (d'après 1.), d'où $\underline{f = s_{(AB)}}$.
3. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ admettant un point fixe A unique** :*
*Soit $B \in \mathscr{P}$ tel que $B \neq A$ et $B' = f(B)$. Notons Δ la médiatrice de $[BB']$. Puisque $AB = AB'$, $A \in \Delta$, donc $s_\Delta \circ f$ conserve A et B et est une isométrie. D'après 2. et 1., $s_\Delta \circ f = s_{(AB)}$ ou $s_\Delta \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ (en effet, on ne sait pas si cette isométrie $s_\Delta \circ f$ conserve trois points non alignés !). Cela donne alors $f = s_\Delta \circ s_{(AB)}$ ou $f = s_\Delta$, ce dernier cas étant à exclure **dans ce cas**[1] car f admettrait plus d'un point fixe. Au final, $\underline{f = s_\Delta \circ s_{(AB)}}$.*
4. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ n'admettant aucun point fixe** :*
Soient $A \in \mathscr{P}$ et $A' = f(A)$. Notons Δ la médiatrice de $[AA']$. Alors $g = s_\Delta \circ f$ fixe A et on a ainsi trois cas à distinguer :
   - *$g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow f = s_\Delta$: absurde car f admettrait une infinité de points invariants ;*
   - *g fixe au moins deux points A et B : alors $g = s_{(AB)} \Leftrightarrow \underline{f = s_\Delta \circ s_{(AB)}}$ (même cas que 3.) ;*
   - *g fixe un unique point (c'est A) : alors soient $B \neq A$, $B'' = g(B)$ et D la médiatrice de $[BB'']$. Dans ce cas, $s_D \circ g$ fixe A et B ($A \in D$ car $AB = AB''$). Par suite et d'après l'étude faite en 3., on a soit*
     - ▷ *$s_D \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \underline{f = s_\Delta \circ s_D}$, ou*
     - ▷ *$s_D \circ g = s_{(AB)} \Leftrightarrow \underline{f = s_\Delta \circ s_D \circ s_{(AB)}}$.*

Tous les cas ont été envisagés, et f ne pouvant être qu'un résultat souligné, on constate bien qu'elle est la composée d'au plus trois réflexions. ■

Dans toute la suite de la leçon, le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est supposé être orienté.

42.3 Groupe des déplacements

Définition 3 : Une isométrie du plan qui conserve les angles orientés est appelée *déplacement*. Celle qui les inverse est appelé *anti-déplacement*. On note leur ensemble respectivement $\mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$ et $\mathrm{Is}^-(\mathscr{P})$.

[1] : En effet, au point 4, on trouvera une fonction g qui a la possiblité de vérifier ces deux mêmes cas, mais n'étant pas f, le cas exclu ne le sera plus. C'est un piège dans lequel il ne faut pas tomber, car sinon un cas est oublié et le résultat s'en trouve alors **faux** !

`Remarque 3` : On a $\mathrm{Is}^-(\mathscr{P}) = \mathrm{Is}(\mathscr{P}) \backslash \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$.

Proposition 4 : $(\mathrm{Is}^+(\mathscr{P}), \circ)$ est un groupe.

démonstration *:* $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$ *est évident. Soient* $A, B, C \in \mathscr{P}$ *et* $f, g \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$*. Pour tout* $X \in \{A, B, C\}$*, on note* $X' = f(X)$ *et* $X'' = g(X)$*, de sorte que* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A''C''})$*, donc* $g \circ f$ *conserve les angles orientés. De plus, on sait par le théorème 3 que* f^{-1} *existe et* $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$*, donc* $f^{-1} \circ f(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow f^{-1}(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$*, et il vient que* $f^{-1} \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$ *(car* $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ *et* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ *ont la même orientation puisque* $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P})$*).* ■

Lemme 2 : Un déplacement (resp. anti-déplacement) est un nombre pair (resp. impair) de composées de réflexions.

démonstration *: On sait déjà qu'une isométrie est la composée d'au plus trois réflexions. Excluons* $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ *qui est à la fois un déplacement et une composée de deux réflexions de même axe. Alors* $f \in \mathrm{Is}^(\mathscr{P}) \Rightarrow f = s_1 \circ \cdots \circ s_n$ *avec* $n = 1, 2, 3$ *et* $s_i \neq s_j$*. Puisqu'une réflexion échange les angles orientés*[2]*,* $f \in \mathrm{Is}^+(\mathscr{P}) \Leftrightarrow (-1)^n$ *pair* $\Leftrightarrow n$ *pair.* ■

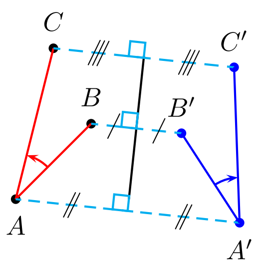
Conséquence : Tout déplacement du plan est soit l'identité, soit une translation, soit une rotation (conséquence de la démonstration du théorème 4[3] et du lemme).

Proposition 5 : Soient $A, B, A', B' \in \mathscr{P}$ tels que $AB = A'B' \neq 0$. Alors il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. De plus,
– Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, alors $f = t_{\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$;
– Si $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, alors f est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

---

[2] : Montrons-le, car ce n'est pas si évident.... Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{P}$. On primera les images des points par la réflexion considérée. Alors par la relation de Chasles, on trouve que

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'B}) + (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{AB}) \; [2\pi] \\
&= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB}) \; [2\pi] \\
&= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BA}) \; [2\pi] \\
&= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) - (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) \; [2\pi] \\
&= -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) \; [2\pi] \\
\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) &= -(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}) \; [\pi].
\end{aligned}$$



La formule d'Al-Kashi appliquée aux deux triangles ABC et $A'B'C'$ (dont les côtés ont même mesure puisqu'une réflexion est une isométrie) nous permet de voir que les angles géométriques $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ sont les mêmes (ils ont même cosinus). L'égalité modulo π devient alors une égalité modulo 2π (sinon l'un des angles pourrait être aigu et l'autre obtu), et le résultat s'en trouve démontré.

[3] : On rappelle (pré-requis) qu'une translation est la composée de deux réflexions d'axes strictement parallèles et qu'une rotation de centre O est la composée de deux réflexions d'axes sécants en O.

démonstration :
Existence *: La translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme B en b tel que $\overrightarrow{A'b} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow A'b = AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{A'b}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, de sorte que la rotation r de centre A' et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ evoie b sur B' et fixe A'. Par suite, $f = r \circ t$ envoie A sur A' et B sur B'. De plus, r et t sont des déplacements, donc f aussi (proposition 4).*
Unicité *: Soit g un autre tel déplacement. Alors $f^{-1} \circ g$ est un déplacement (proposition 4) qui fixe A' et B', donc d'après la démonstration du théorème 4, $f^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, c'est-à-dire $f = g$.* ■

Exercice : Construire le centre O de cette rotation.

<u>**Solution**</u> : Si $A = A'$ et $B = B'$, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} = r(\Omega, 0)$ pour tout $\Omega \in \mathscr{P}$. Si $A = A'$ ou $B \neq B'$, alors $f = r\big(A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})\big)$. Supposons alors $A \neq A'$ et $B \neq B'$, de sorte que O appartiennent à la fois à la médiatrice de $[AA']$ (notée D) et celle de $[BB']$ (notée D'). En effet, $OA = OA'$ et $OB = OB'$. Distinguons alors deux cas :
– **Si D et D' ne sont pas parallèles**, alors $\{O\} = D \cap D'$.
– **Si D et D' sont parallèles**, alors $D = D'$ puisqu'elles contiennent toutes les deux le point O. Dans ce cas, $\{O\} = (AB) \cap (A'B')$ (puisqu'une rotation transforme une droite en droite), et si jamais ces deux dernières droites étaient aussi parallèles, c'est-à-dire $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ (et non $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ car on aurait affaire à une translation [premier point de la proposition 5] !), O serait le centre du parallélogramme $ABA'B'$ (de sorte que f soit en fait la symétrie centrale de centre O). ◇

42.4 Classification des isométries

Le théorème 4 et le lemme 2 nous permettent d'établir la classification qui suit (voir démonstration ci-dessous). On note $\mathrm{Inv}(f)$ l'ensemble des points invariants d'une isométrie f.

$\mathrm{Inv}(f)$	Déplacements	Anti-déplacements
$\mathscr{P}$	$\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$	
$\mathscr{D}$		$s_{\mathscr{D}}$
$\{A\}$	$r(A, \theta) \quad (\theta \neq 0)$	
$\varnothing$	$t_{\overrightarrow{u}} \quad (\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0})$	$sg(d, \overrightarrow{u}) = t_{\overrightarrow{u}} \circ s_d$

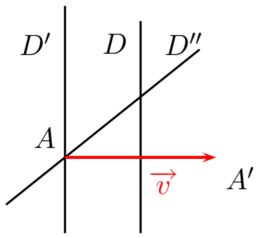
$sg(d, \overrightarrow{u})$ désigne la symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, donc la composée de la réflexion d'axe d et de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.

démonstration :

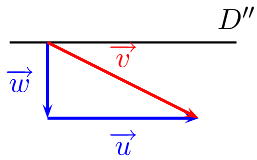
1. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ laissant $\mathscr{P}$ invariant :***
   Alors f fixe trois points non alignés, donc <u>$f = \mathrm{Id}(\mathscr{P})$</u>, et f est un déplacement.
2. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ fixant une droite $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$:***
   Alors f fixe au moins deux points mais pas trois non alignés, donc <u>$f = s_D$</u>, et f est un anti-déplacement.
3. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ fixant un unique point $A \in \mathscr{P}$:***
   Soient $B \in \mathscr{P}$ distinct de A, $B' = f(B)$ et Δ la médiatrice de $[BB']$. Alors $A \in \Delta$, donc $s_\Delta \circ f$ fixe A et B. Par suite, $s_\Delta \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow f = s_\Delta$ (absurde) ou $s_\Delta \circ f = s_{(AB)} \Leftrightarrow f = s_\Delta \circ s_{(AB)}$. Puisque $B \notin \Delta$, $\Delta \cap (AB) = \{A\}$, donc <u>f est une rotation de centre A et d'angle θ non nul</u>, et c'est en particulier un déplacement.
4. ***Soit $f \in \mathrm{Is}(\mathscr{P})$ n'admettant aucun point fixe :***
   Soient $A \in \mathscr{P}$, $A' = f(A)$ et D la médiatrice de $[AA']$. Alors $g = s_D \circ f$ fixe A et on a donc trois cas à distinguer :

- $g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow f = s_D \longrightarrow$ *absurde ;*
- $g = s_{(AB)}$ *où* B *est aussi fixé par* g*, donc* $f = s_D \circ s_{(AB)}$*. Si* B *est tel que* (AB) *et* D *soit parallèles, alors* f *est une translation de vecteur non nul (en effet,* $A \notin D$*), donc un déplacement. Par contre, si* B *est tel que* (AB) *et* D *se coupent en un unique point* O*, alors* f *est une rotation de centre* O*, ce qui est absurde (*f *n'est pas supposé admettre de points fixes).*
- $g = r(A,\theta)$ *avec* $\theta \neq 0$*, donc* $f = s_D \circ r(A,\theta)$*. Or on sait que* $r(A,\theta)$ *peut se décomposer sous la forme* $s_{D'} \circ s_{D''}$*, avec* D' *et* D'' *non parallèles (sinon ce serait une translation...). L'un des deux axes peut être choisi arbitrairement, par exemple* D' *de sorte qu'il soit parallèle à* D*. Donc*

$$
\begin{aligned}
f &= s_D \circ s_{D'} \circ s_{D''} \\
&= t_{\overrightarrow{v}} \circ s_{D''} && (42.1) \\
&= t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ s_{D''} && (42.2) \\
&= t_{\overrightarrow{u}} \circ (s_{D'''} \circ s_{D''}) \circ s_{D''} && (42.3) \\
&= t_{\overrightarrow{u}} \circ s_{D''}
\end{aligned}
$$



Explications : (42.1) vient du fait que D *et* D' *sont parallèles, donc la composée des deux réflexions est la translation dont le vecteur est le double de celui qui minimise la distance entre* D' *et* D*. (42.2) vient de la décomposition du vecteur* $\overrightarrow{v}$ *en deux vecteurs appartenant à* D'' *et* $(D'')^{\perp}$*, et enfin, (42.3) s'explique de l'othogonalité entre* $\overrightarrow{w}$ *et* D'' *(en effet, on peut alors écrire* $t_{\overrightarrow{w}} = s_{D'''} \circ s_{D''}$ *avec* D''' *parallèle à* D''*).*



f *est donc une symétrie glissée, et donc un anti-déplacement.*

Puisque $\mathrm{Inv}(f)$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{P}$*, c'est soit* $\mathscr{P}$ *lui-même, soit une droite* $\mathscr{D}$ *de* $\mathscr{P}$*, soit un point* A *de* $\mathscr{P}$ *ou encore* $\varnothing$*. Tous les cas ont donc été étudiés, et cela achève la démonstration.* ■