

# LEÇON N° 56 :

## Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$  et une condition initiale.

L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

### Pré-requis :

- Suites numériques : monotonie, convergence, divergence ;
- Théorème des valeurs intermédiaires ;
- $\mathbb{R}$  est complet : toute suite de Cauchy y est convergente.

Notations : Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application définie sur  $I$  telle que  $f(I) \subset I$ . Il existe alors une unique suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (notée simplement  $(u_n)$  dans la suite) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note encore  $F = \{x \in I \mid f(x) = x\}$ .

## 56.1 Monotonie de la suite

### Théorème 1 :

- (i) Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $(u_n)$  est monotone et de plus,
  - a. Si  $f(u_0) \geq u_0$ , alors  $(u_n)$  est croissante,
  - b. Si  $f(u_0) \leq u_0$ , alors  $(u_n)$  est décroissante ;
- (ii) Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors  $(u_n)$  n'est pas monotone, mais les sous-suite  $(p_n) = (u_{2n})$  et  $(i_n) = (u_{2n+1})$  le sont, et
  - a. Si  $u_2 \geq u_0$ , alors  $(p_n)$  est croissante et  $(i_n)$  décroissante,
  - b. Si  $u_2 \leq u_0$ , alors  $(p_n)$  est décroissante et  $(i_n)$  croissante.

### démonstration :

- (i) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$  (resp.  $\leq$ ). L'initialisation est assurée par l'hypothèse. Supposons alors que  $u_n \geq u_{n-1}$  (resp.  $\leq$ ). Alors

$$f \text{ croissante} \Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n-1}) \text{ (resp. } \leq \text{)} \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp. } \leq \text{)}.$$

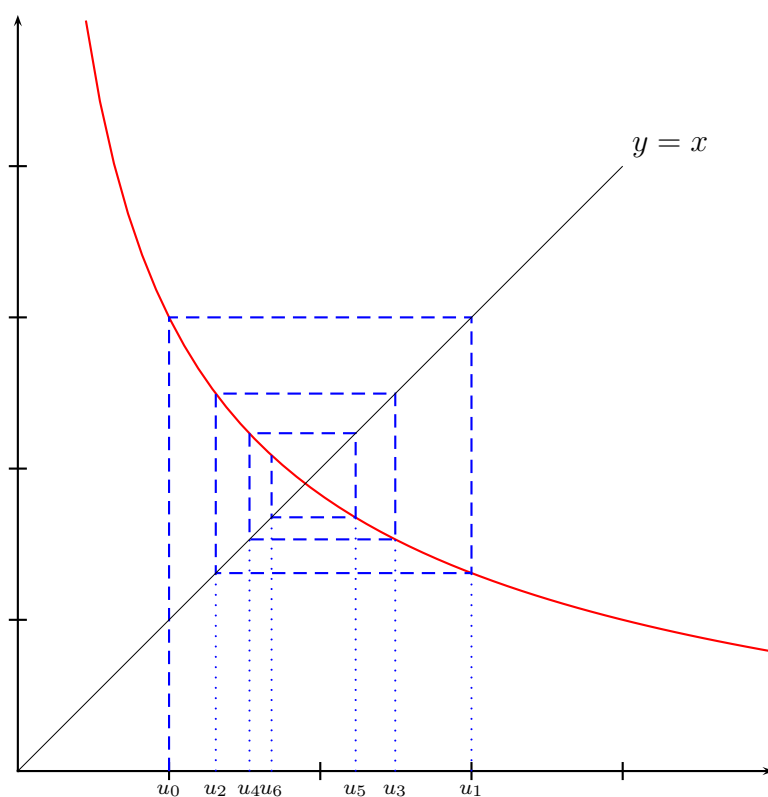
(ii) Supposons que  $u_{n-1} \leq u_n$ . Alors

$$f \text{ décroissante} \Rightarrow f(u_{n-1}) \geq f(u_n) \text{ (resp. } \leq \text{)} \stackrel{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} u_n \geq u_{n+1} \text{ (resp. } \leq \text{)},$$

donc  $(u_n)$  n'est pas monotone. Notons que  $p_{n+1} = f \circ f(p_n)$  et  $i_{n+1} = f \circ f(i_n)$ , et  $f \circ f$  est croissante. En supposant  $u_2 \geq u_0$  (resp.  $\leq$ ), ce qui précède nous permet d'affirmer que  $u_3 \leq u_1$  (resp.  $\geq$ ). Par application de (i), on en déduit que  $(p_n)$  est croissante (resp. décroissante) et  $(i_n)$  décroissante (resp. croissante). ■

## Représentation et interprétation graphiques

Dans un repère orthonormé, on trace la première bissectrice (la droite d'équation  $y = x$ ) et la courbe représentative de  $f$ . Expliquer comment on construit la suite  $(u_n)$ .



Remarque 1 : Si  $I$  est un fermé, alors toute suite  $(u_n)$  monotone converge dans  $I$ . **À partir de maintenant, on suppose que  $I$  est fermé.**

## 56.2 Comportement asymptotique de la suite

Notons  $F$  l'ensemble des points fixes de la fonction  $f$ .

**Proposition 1 :** Supposons  $f$  continue sur  $I$ . Si la suite  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $L$ , alors  $L \in F$ .

**démonstration :** Supposons que  $(u_n)$  converge vers une limite finie  $L$ . Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \stackrel{f \text{ cont.}}{=} f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n\right).$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \in I$  (car  $I$  fermé), on a  $L = f(L)$  par unicité de la limite. ■

Remarque 2 : Il en résulte qu'une condition nécessaire pour que  $(u_n)$  converge est que  $F \neq \emptyset$ .

### 56.2.1 Cas où $f$ est croissante

D'après le théorème 1,  $(u_n)$  est monotone. Si  $I = [a, b]$ , alors  $(u_n)$  converge et donc  $F \neq \emptyset$ . Étudions le cas  $(u_n)$  croissante (l'autre cas s'étudiant de manière analogue).

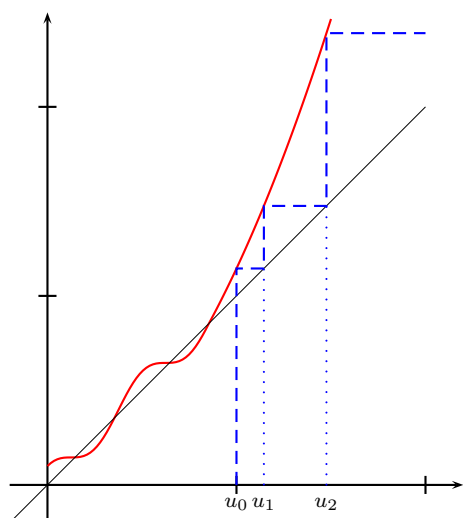
**Proposition 2 :**

- (i) Si  $F \cap [u_0, +\infty[ = \emptyset$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  ;
- (ii) Si  $F \cap [u_0, +\infty[ \neq \emptyset$ , alors  $(u_n)$  converge en croissant vers  $\min(F \cap [u_0, +\infty[)$ .

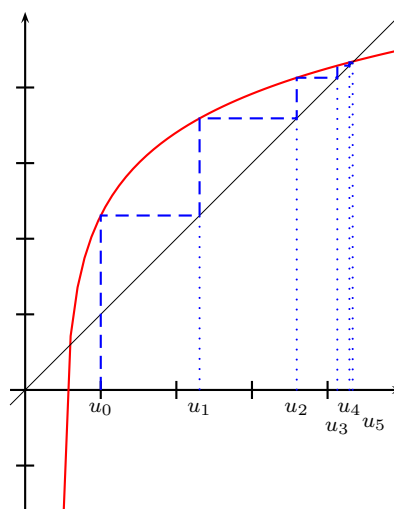
**démonstration :**

- (i) On raisonne par contraposée. Supposons  $u_n \rightarrow L < +\infty$ . Alors  $L \in F$  (proposition 1), et  $(u_n)$  est croissante implique que  $L \geq u_0$ , d'où  $F \cap [u_0, +\infty[ \neq \emptyset$ .
- (ii) Puisque nous sommes dans le cas où  $f$  est croissante, et qu'il en est de même de  $(u_n)$  par supposition, le théorème 1 nous assure que  $f(u_0) \geq u_0$ . Puisque  $f$  est continue, et que  $F \cap [u_0, +\infty[ \neq \emptyset$ , on en déduit qu'il existe un espace entre la courbe de  $f$  et la première bissectrice (entre les abscisses  $u_0$  et  $\min(F \cap [u_0, +\infty[)$ ), dans lequel reste l'escargot de la construction de la suite  $(u_n)$  strictement croissante (en effet, si la suite possédait deux termes consécutifs égaux, c'est qu'à partir de ce rang,  $u_n = \min(F \cap [u_0, +\infty[)$ , et la convergence est assurée). La suite  $(u_n)$  est strictement croissante et bornée dans  $[u_0, \min(F \cap [u_0, +\infty[)$ , elle converge donc vers une limite finie  $L$  qui est donc un point fixe de  $f$  (proposition 1). Le seul point fixe de cet intervalle est  $\min(F \cap [u_0, +\infty[)$ . ■

Représentations graphiques :



Cas (i)



Cas (ii)

### 56.2.2 Cas où $f$ est décroissante

**Proposition 3 :** La suite  $(u_n)$  converge si et seulement si ses sous-suites  $(i_n) = (u_{2n+1})$  et  $(p_n) = (u_{2n})$  sont adjacentes.

*démonstration :*

" $\Rightarrow$ " : Trivial, en utilisant le théorème 1.

" $\Leftarrow$ " : Par la proposition 1, les suites  $(i_n)$  et  $(p_n)$  convergent chacune vers un point fixe de  $f \circ f$ . Notons  $L$  leur limite commune et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$  vérifie  $|u_{2n} - L| < \varepsilon$  et  $|u_{2n+1} - L| < \varepsilon$ . Par inégalité triangulaire, on trouve que  $|u_{2n} - u_{2n+1}| < 2\varepsilon$ . Soient  $p, q \geq N$  tels que  $p < q$ . On a alors

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &\leq |u_p - u_{p+1}| + \dots + |u_{q-1} - u_q| = \sum_{i=1}^{q-p} |u_{p+i-1} - u_{p+i}| \\ &\leq (q-p) 2\varepsilon, \end{aligned}$$

donc  $(u_n)$  est une suite de Cauchy dans  $I$ , qui converge alors vers une valeur notée  $\ell \in I$  ( $I$  fermé). D'après la proposition 1,  $\ell = f(\ell)$ , donc  $\ell = f(\ell) = f \circ f(\ell)$  et  $\ell$  est point fixe de  $f \circ f$ , d'où  $L = \ell$ . ■

### 56.2.3 Cas où $f$ est contractante

**Définition 1 :**  $f$  est dite *contractante* si

$$\exists k \in [0, 1[ \mid \forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

**Théorème 2 :** Si  $f$  est contractante, alors  $f$  admet un unique point fixe  $L$  vers lequel converge la suite  $(u_n)$ , convergence contrôlée par l'inégalité

$$|u_n - L| \leq k^n |u_0 - L|.$$

*démonstration :*

**Convergence :** Montrons que la suite  $(u_n)$  est une suite de Cauchy. Pour tous entiers  $n$  et  $p$ , on a

$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |f(u_{n+i}) - f(u_{n+i-1})| \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} k |u_{n+i} - u_{n+i-1}| \leq \dots \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^i |u_{n+1} - u_n| \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) |u_{n+1} - u_n| \leq \dots \leq \left( \sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) k^n |u_1 - u_0| \\ &\leq \left( \sum_{i=0}^{p-1} k^{i+n} \right) |u_1 - u_0|. \end{aligned}$$

Posons alors  $S_n = \sum_{i=0}^n k^i$ , de sorte que

$$\sum_{i=0}^{p-1} k^{i+n} = S_{n+p-1} - S_{n-1}.$$

Or  $k \in [0, 1[$ , donc  $(S_n)$  est convergente, et est donc une suite de Cauchy. On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |S_{n+p-1} - S_{n-1}| < \varepsilon.$$

Finalement, on trouve que

$$|u_{n+p} - u_n| \leq |S_{n+p-1} - S_{n-1}| |u_1 - u_0| < \varepsilon |u_1 - u_0|,$$

nous amenant à écrire que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy, qui converge donc vers une limite  $L \in I$ .

**Existence du point fixe :** Par la proposition 1,  $L$  est point fixe de  $f$ .

**Unicité du point fixe :** Supposons qu'il existe deux points fixes distincts  $L$  et  $L'$  de  $f$ . Alors

$$|L - L'| = |f(L) - f(L')| \leq k|L - L'| < |L - L'| \quad \text{car } k < 1,$$

ce qui est impossible.

**Convergence contrôlée :** On vérifie l'inégalité par récurrence. L'initialisation au rang  $n = 0$  est évidente. Supposons alors l'hypothèse de récurrence (H.R.) vraie au rang  $n$ , et montrons qu'elle l'est toujours au rang  $(n + 1)$  :

$$|u_{n+1} - L| = |f(u_n) - f(L)| \leq k|u_n - L| \stackrel{\text{H.R.}}{\leq} k^{n+1}|u_0 - L|.$$

■

**Remarque 3 :** Soit  $(u_n)$  une suite définie par une relation de récurrence qui converge vers une limite  $L$  inconnue. À la calculatrice, lorsqu'il s'agit de trouver l'entier  $N$  tel que  $\forall n \geq N, |u_n - L| \leq 10^{-p}$  ( $p$  donné), il faut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- ◇ Si  $(u_n)$  est non monotone, alors (proposition 3) les sous-suites  $(i_n)$  et  $(p_n)$  sont adjacentes, donc il suffit de comparer  $|p_n - i_n|$  à  $10^{-p}$ .
- ◇ Si  $(u_n)$  est monotone, alors il est nécessaire d'avoir une majoration *a priori* de l'erreur, par exemple par le théorème 2.

**ATTENTION :** Soit

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

À cause de la précision limitée des calculatrices (10 ou 12 chiffres, généralement) en mode "flottant" (calculs avec virgule), cette suite convergera vers la valeur

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N},$$

où  $N$  sera l'entier tel que  $\frac{1}{N+1} = 0$  (au sens de la calculatrice !! en effet, au bout d'un certain temps, le nombre  $\frac{1}{n}$  devient si petit quand  $n$  augmente que la calculatrice le remplacera par 0). Or cette suite tend clairement vers  $+\infty$  (série harmonique), donc **la convergence à la calculatrice n'entraîne pas celle en réalité...**

## 56.3 Applications

### 56.3.1 Méthode des Babyloniens

Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et la suite de Héron définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

(ii) En déduire que  $(u_n)$  est décroissante et que  $(u_n)$  converge vers  $\sqrt{a}$ .

**Solution :**

(i) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n} = \frac{u_n}{2} - \sqrt{a} + \frac{a}{2u_n} = u_{n+1} - \sqrt{a}.$$

Remarquons alors que puisqu'un carré est toujours positif et que  $u_n \geq 0$  (facile à montrer par récurrence), on a alors  $u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii) On a que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} - u_n + \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + a}{2u_n} - \frac{2u_n^2}{2u_n} + \sqrt{a} = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \\ &\stackrel{a \geq 0}{\leq} \frac{\underbrace{(u_n - \sqrt{a})^2}_{\leq 0 \text{ (rem. du (i))}} \underbrace{(\sqrt{a} + u_n)}_{\geq 0}}{\underbrace{2u_n}_{\geq 0}} \leq 0. \end{aligned}$$

prouvant ainsi que la suite  $(u_n)$  est décroissante. De plus, elle est minorée par 0 puisque tous ses termes sont par construction positifs, donc elle converge vers une limite  $L$  qui (d'après la proposition 1) vérifie

$$L = \frac{1}{2} \left( L + \frac{a}{L} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \frac{a}{L} \Leftrightarrow L^2 = a,$$

en utilisant la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $L = \sqrt{a}$ , l'autre solution de l'équation précédente ne convient pas puisque  $-\sqrt{a} \notin \mathbb{R}_+^*$ .

### 56.3.2 Méthode de Newton

Supposons  $f$  strictement convexe sur  $I = [a, b]$  et  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique  $x \in ]a, b[$  tel que  $f(x) = 0$ . La suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge alors vers  $x$ .

Exemple :  $f(x) = x^2 - a$ , pour  $a > 0$ . On a alors  $f'(x) = 2x$ , d'où

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

On pourra montrer, par approfondissement, que la convergence de cette suite vers  $\sqrt{a}$  est beaucoup plus rapide qu'avec la méthode des Babyloniens.

© 2010 par Martial LENZEN.

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L. 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteur.