

# LEÇON N° 63 :

## Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$ . Étude de la continuité, de la dérivabilité. Exemples.

### Pré-requis :

- Applications injectives, surjectives, bijectives ;
- Définitions et propriétés : fonctions monotones, convexes, concaves ;
- Notions de continuité, de dérivabilité et de limite ;
- Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ .

### 63.1 Fonctions réciproques

**Définition 1 :** Soient  $E, F \subset \mathbb{R}$ . Une application  $g : E \longrightarrow F$  est dite *inversible* s'il existe une application  $h : F \longrightarrow E$  telle que

$$h \circ g = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad g \circ h = \text{Id}_F.$$

On dit alors que  $h$  est la fonction réciproque de  $g$  et on note  $h = g^{-1}$ .

Remarque 1 :

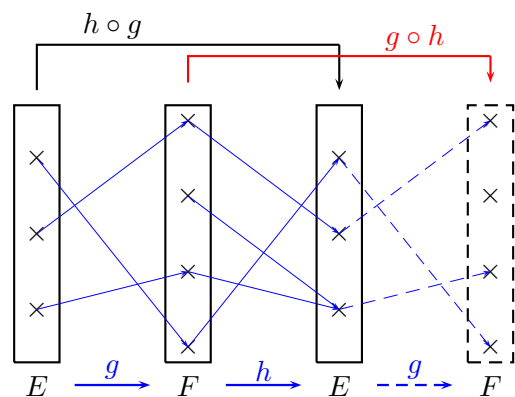
Il faut absolument avoir les deux conditions !!

En effet, dans l'exemple ci-contre, on voit bien que

$$h \circ g = \text{Id}_E,$$

mais on a aussi clairement que

$$g \circ h \neq \text{Id}_F.$$



**Proposition 1 :** Soient  $E, F \subset \mathbb{R}$  et  $g : E \longrightarrow F$ .  $g$  admet au plus une fonction réciproque.

**démonstration** : Soient  $h_1$  et  $h_2$  telles que  $h_1 \circ g = h_2 \circ g = \text{Id}_E$  et  $g \circ h_1 = g \circ h_2 = \text{Id}_F$ . Alors on a  $h_2 \circ (g \circ h_1) = h_2 \circ \text{Id}_F = h_2$ . D'autre part, par associativité, on trouve que  $h_2 \circ (g \circ h_1) = (h_2 \circ g) \circ h_1 = \text{Id}_E \circ h_1 = h_1$ . D'où  $h_1 = h_2$ . ■

Remarques 2 :

- Cela justifie la notation  $g^{-1}$ .
- Si  $g$  est inversible, alors  $g^{-1}$  l'est aussi et  $(g^{-1})^{-1} = g$  (conséquence de la définition).

**Proposition 2** : Soient  $E, F \subset \mathbb{R}$  et  $g : E \longrightarrow F$ . Alors  $g$  est inversible si et seulement si  $g$  est bijective.

**démonstration** :

" $\Rightarrow$ " : Supposons  $g$  inversible. Alors pour tous  $x, x' \in E$ , on a  $g(x) = g(x') \Rightarrow g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(g(x')) \Rightarrow x = x'$  d'où l'injectivité de  $g$ . Soit alors  $y \in F$ . Il s'agit de trouver  $x \in E$  tel que  $g(x) = y$ . Or  $x = g^{-1}(y)$  convient, d'où la surjectivité de  $g$ , et  $g$  est finalement bijective.

" $\Leftarrow$ " : Supposons  $g$  bijective et notons  $g : x \longmapsto y$ . On pose  $h : F \longrightarrow E : y \longmapsto x$  et l'on vérifie que  $h$  est aussi bijective, que  $h \circ g = \text{Id}_E$  et que  $g \circ h = \text{Id}_F$ . On conclut que  $g$  est inversible. ■

Remarques 3 :

- On vient juste de montrer que si  $g$  est inversible, alors  $g^{-1}$  est aussi une bijection, de  $F$  dans  $E$ .
- Dans un repère normé (dont les vecteurs unitaires sont de même norme), les courbes représentatives de  $g$  et  $g^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

## 63.2 Inversibilité de $f$

**Proposition 3** :  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

**démonstration** :

" $\Leftarrow$ " : Supposons par exemple  $f$  strictement croissante (l'autre cas se démontrant de manière totalement analogue). Soient  $x, x' \in I$ . Alors

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(x') \\ f(x) \geq f(x') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ x \geq x' \end{cases} \Leftrightarrow x = x'.$$

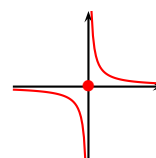
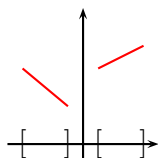
Donc  $f$  est injective.

" $\Rightarrow$ " : Montrons ce résultat par contraposée et supposons donc  $f$  non monotone. Alors il existe  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$  tels que  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$  et  $x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) \leq f(x_4)$ . On pose alors

$$g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4).$$

$g$  est continue sur  $[0, 1]$  (puisque  $f$  l'est par hypothèse sur  $I$ ) et l'on a  $g(0) \leq 0$  et  $g(1) \geq 0$ . Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'en déduire qu'il existe  $t_0 \in [0, 1]$  tel que  $g(t_0) = 0$ . En posant finalement  $x_5 = t_0x_1 + (1-t_0)x_3$  et  $x_6 = t_0x_2 + (1-t_0)x_4$ , on a  $x_5 < x_6$  et  $f(x_5) = f(x_6)$ , c'est-à-dire  $f$  n'est pas injective. ■

Remarques 4 : N'oublions pas que toutes ces propriétés sont vraies sous l'hypothèse générale que  $f$  est continue sur un intervalle. Cela nous amène à deux subtilités :



La fonction  $f$  définie ci-dessus est injective et continue (car continue sur chacun des deux intervalles), mais  $f$  n'est pas monotone.

Cette fonction est inversible, mais n'est clairement pas strictement monotone. Le problème vient de la continuité en 0.

On se gardera donc finalement de dire que les fonctions inversibles sont uniquement les fonctions strictement monotones !

**Conséquence :** Si  $f : I \rightarrow f(I)$  (condition vraie d'après le théorème des valeurs intermédiaires, rajoutant la surjectivité à la proposition précédente), alors  $f$  est bijective (ou inversible selon la proposition 2) si et seulement si  $f$  est strictement monotone.

Dans la suite de la leçon, on notera  $J$  l'intervalle  $f(I)$ , et  $f : I \rightarrow f(I) = J$ .

### 63.3 Propriétés des fonctions réciproques

Notons avant tout que  $f : I \rightarrow f(I)$ , supposée être continue et strictement monotone sur l'intervalle  $I$ , est donc inversible, d'inverse notée  $f^{-1}$ .

#### 63.3.1 Continuité

**Proposition 4 :**  $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J$  et est de même sens de variations que  $f$ . De plus,  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .

*démonstration :* Avant de commencer, nous allons énoncer et démontrer un lemme qui nous sera utile :

**Lemme 1 :** Soit  $g$  une fonction définie sur  $[a, b]$ , strictement monotone. Si  $g([a, b])$  est un intervalle, alors  $g$  est continue.

*démonstration :* Supposons  $g$  strictement croissante. Soit  $c \in [a, b]$ . On veut montrer que  $g$  est continue en  $c$ . Comme  $g$  est croissante, les limites à gauche et à droite en  $c$  de  $g(x)$  existent, valent respectivement  $\ell = \sup\{g(x), x < c\}$  et  $L = \inf\{g(x), x > c\}$ . On a donc  $\ell \leq g(c) \leq L$ .

Supposons alors  $\ell \neq L$ . Alors  $x < c \Rightarrow g(x) \in [g(a), \ell]$  et  $x > c \Rightarrow g(x) \in [L, g(b)]$ , donc  $]\ell, L[ \setminus \{g(c)\} \not\subset [g(a), g(b)] = g([a, b])$ . Or  $g([a, b])$  est un intervalle, donc cette non inclusion est impossible, d'où  $\ell = L = g(c)$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c).$$

Si jamais  $c = a$  ou  $c = b$ , on ne regarde que la limite à droite ou à gauche. Finalement,  $g$  est continue en  $c$ , donc sur  $[a, b]$ . □

Nous allons donc pouvoir commencer la démonstration de cette proposition. Supposons  $f$  strictement croissante. Soient  $x, x' \in I$ . Alors  $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ . Posons  $y = f(x) \in f(I) = J$  et

$y' = f(x') \in J$ . Or  $f^{-1}(y) = x$  et  $f^{-1}(y') = x'$ , donc  $y < y' \Rightarrow f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$  et  $f^{-1}$  est strictement croissante. Pour prouver la continuité de  $f^{-1}$ , il suffit alors d'appliquer le lemme avec  $g = f^{-1}$  et  $[a, b] = f(I)$ . En effet,  $f$  continue implique que  $f(I)$  est un intervalle et  $f^{-1}(f(I)) = I$  est un intervalle. ■

### 63.3.2 Dérivabilité

**Proposition 5 :** Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$ , de dérivée

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

**démonstration :** Soit  $x_0 \in I$  et  $\Delta : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On pose  $y_0 = f(x_0)$ . Pour  $y \in J \setminus \{y_0\}$ , on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f \circ f^{-1}(y) - f \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{\Delta(f^{-1}(y))}.$$

Or  $f$  est dérivable sur  $I$  implique que  $f$  est continue, et par la proposition,  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ , donc  $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y_0) = x_0$  et  $\Delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) (\neq 0 \text{ par hypothèse})$ , donc le théorème de composition des limites nous assure que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)},$$

ce qui démontre le résultat. ■

### 63.3.3 Autres propriétés

**Proposition 6 :**

- Si  $f$  est impaire, alors  $f^{-1}$  est impaire ;
- Si  $f$  est strictement croissante et convexe (resp. concave), alors  $f^{-1}$  est concave (resp. convexe) ;
- Si  $f$  est strictement décroissante et convexe (resp. concave), alors  $f^{-1}$  est convexe (resp. concave).

**démonstration :**

- Pour tout  $x \in I$ , on a  $-f(x) = f(-x)$ . Donc  $f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x$ . Or on a aussi  $f(x) = -f(-x)$ , donc  $f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1}(-f(-x)) = f^{-1}(f(x))$ . D'où l'égalité  $f^{-1}(-f(x)) = -f^{-1}(f(x))$ . En conclusion, pour tout  $y = f(x) \in f(I)$ , on a  $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$ .
- Conséquence immédiate de la symétrie entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .
- Conséquence immédiate de la symétrie entre  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  par rapport à la droite d'équation  $y = x$ . ■

## 63.4 Exemples

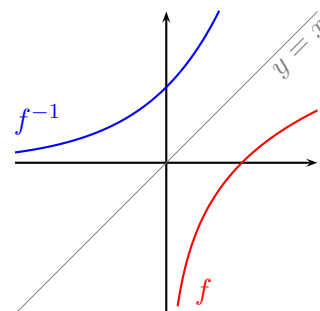
### 63.4.1 Fonctions ln et exp

Soit  $f$  la fonction définie ci-dessous et sa réciproque  $f^{-1}$  :

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \ln(x) \quad \quad \quad x \longmapsto \exp(x).$$

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x} \circ \exp\right)(x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x).$$



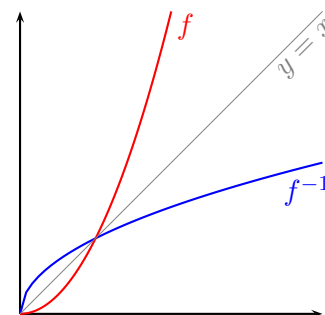
### 63.4.2 Fonction racine ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

Soit  $f$  la fonction définie ci-dessous et sa réciproque  $f^{-1}$  :

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^n \quad \quad \quad x \longmapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x}^{n-1}} = \frac{1}{n x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n x}.$$



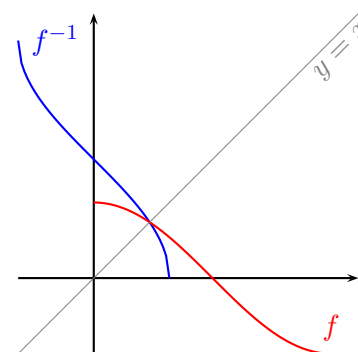
### 63.4.3 Fonctions trigonométriques

Soit  $f$  la fonction définie ci-dessous et sa réciproque  $f^{-1}$  :

$$f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{et} \quad f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ x \longmapsto \cos(x) \quad \quad \quad x \longmapsto \arccos(x).$$

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Remarque : Pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $\sin(\arccos x)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow \sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ . Or  $\sin(\arccos 0) = \sin 0 = 1$ , donc

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Soit  $g$  la fonction définie ci-dessous et sa réciproque  $g^{-1}$  :

$$g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{et} \quad g^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \longmapsto \cos(x) \quad \quad \quad x \longmapsto \arcsin(x).$$

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

