LEÇON N° 73 :

Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

Pré-requis :
- *Continuité et dérivabilité ;*
- *Fonctions logarithme (dérivée et propriétés caractéristiques) ;*
- *Fonction exponentielle (définition : fonction réciproque du logarithme,* $\exp_a x = a^x$, $a^{x+y} = a^x\ a^y$, *comportement en* $\pm\infty$*).*

Le titre nous suggère de commencer par une étude rapide des fonctions exponentielles de base a, qui vérifient l'équation fonctionnelle. Nous verrons dans un second temps comment retrouver ces exponentielles à partir de l'équation fonctionnelle donnée, que nous noterons ($\bigstar$).

73.1 Etude des fonctions exponentielles

73.1.1 Définition

Définition 1 : Pour tous $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit a^x par l'égalité

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

La fonction $f_a : x \longmapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base* a.

`Remarques 1` : Si $a = 1$, on a alors $a^x = 1$ pour tout x réel. Dans la suite, on supposera donc $a \neq 1$. Nous justifierons la notation a^x à la section 4.

73.1.2 Études des variations

Proposition 1 : La fonction f_a est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $f_a'(x) = \ln(a) \times f_a(x)$.

démonstration : *Cette fonction est continue (resp. dérivable) en tant que composée d'applications continues (resp. dérivables) sur* $\mathbb{R}$*. La dérivée se calcule aisément.* ∎

On étudie alors les variations de la fonction f_a suivant deux cas :

Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$. Dans ce cas, $f_a(x) > 0$ (fonction exponentielle) implique que $f'_a(x) > 0$, quelque soit le réel x. Ainsi f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f_a(0) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = 0$:

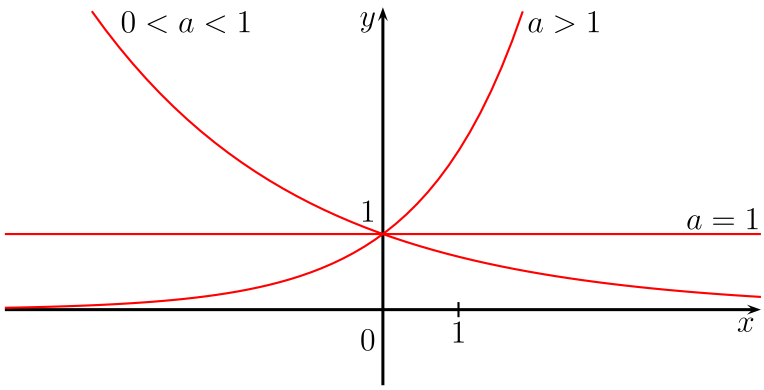
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 1$, alors $f'_a(x) < 0$ pour tout réel x, et on en déduit que f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

73.1.3 Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction $f_a : x \longmapsto a^x$ possède l'une des trois allures ci-dessous, et admet toujours une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.



Remarques 2 :

1. Pour le graphique, il a été choisi de prendre $a = 0,7$ pour le cas où a est strictement compris entre 0 et 1, ainsi que $a = 2,7$ dans le cas où $a > 1$.
2. Soient x un réel et $a > 0$. Alors

$$f_a(x) = a^x = e^{a\ln x} = e^{-a\ln(\frac{1}{a})} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = f_{\frac{1}{a}}(-x),$$

de sorte que les courbes représentatives des fonctions f_a et $f_{\frac{1}{a}}$ soient symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

73.1.4 Propriétés

Proposition 2 : Pour tous x, y réels et $a > 0$, $f_a(x+y) = f_a(x) \times f_a(y)$, c'est-à-dire :

$$a^{x+y} = a^x\, a^y.$$

démonstration *:* $\ln(a^{x+y}) = (x+y)\ln a = x \ln a + y \ln a = \ln(a^x) + \ln(a^y) = \ln(a^x \times a^y)$*, et puisque* $\ln$ *est injective, on en déduit que* $a^{x+y} = a^x\, a^y$*.* ■

73.2 Caractérisation de f_a par l'équation fonctionelle (★)

La proposition précédente traduit que la fonction f_a est solution de l'équation fonctionnelle (★). Cherchons maintenant les éventuelles propriétés que vérifie toute fonction f solution de (★).

73.2.1 Propriétés élémentaires

Notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (★). On peut déjà dire que :

- ◇ $\mathscr{F} \neq \varnothing$ car $\mathscr{F}$ contient f_a (pour tout $a > 0$) et la fonction nulle ;
- ◇ Si une fonction f de $\mathscr{F}$ s'annule en un point x_0, alors f est identiquement nulle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+x_0) = f(x) \times f(x_0) = 0$, et $x + x_0$ parcourt $\mathbb{R}$. Dans la suite, nous n'allons plus considérer le cas où $f \equiv 0$, et nous cercherons donc les solutions de (★) dans l'ensemble $\mathscr{F}^* = \mathscr{F} \backslash \{0\}$.
- ◇ Si une fonction f de $\mathscr{F}^*$, alors f est à valeurs positives. En effet, pour tout réel x,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \overset{(\bigstar)}{=} \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2,$$

  et cette dernière quantité est strictement positive du fait que f ne soit pas identiquement nulle.
- ◇ Enfin, on peut aussi remarquer que $f(0) = 1$ pour toute fonction $f \in \mathscr{F}^*$. En effet,

$$f(0) = f(0+0) = \big(f(0)\big)^2 \overset{f \in \mathscr{F}^*}{\Leftrightarrow} f(0) = 1.$$

73.2.2 Continuité

Théorème 1 : Toute fonction $f \in \mathscr{F}^*$ continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$.

démonstration *: Soient* $f \in \mathscr{F}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$ *arbitrairement fixé. On va montrer que* f *est dérivable en* x*. Pour tout* $h \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$f(x+h) = f(x - x_0 + x_0 + h) = f(x - x_0) \times f(x_0 + h).$$

Or $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ *par la continuité de* f *en* x_0*, de sorte que*

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x - x_0) \times f(x_0) = f\big((x - x_0) + x_0\big) = f(x).$$

Comme x *est quelconque dans* $\mathbb{R}$*, on en déduit que la fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$*.* ■

73.2.3 Dérivabilité

Théorème 2 : Toute fonction $f \in \mathscr{F}^*$ continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

démonstration *: Le théorème précédent nous assure déjà que f est continue sur $\mathbb{R}$. f admet alors une primitive F sur $\mathbb{R}$ qui nous amène à écrire que pour tous réels x, y,*

$$\int_0^x f(t+y)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t) \times f(y)\,\mathrm{d}t = f(y) \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(y)\,F(x).$$

On effectue alors le changement de variable $z = t + y$ dans la première intégrale, donnant ainsi

$$\int_0^x f(t+y)\,\mathrm{d}t = \int_y^{x+y} f(z)\,\mathrm{d}z = f(y)\,F(x),$$

ce qui donne finalement $F(x+y) - F(x) = f(y)\,F(x)$.

En particulier, pour $x = 1$, cette égalité devient $F(y+1) - F(1) = f(y)\,F(1)$. La stricte positivité de f implique que $F(1) > 0$, ce qui rend possible la division par $F(1)$ des deux membres de cette dernière égalité : pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y) = \frac{F(y+1) - F(y)}{F(1)}.$$

Puisque F est dérivable (par définition même), il vient directement que f l'est aussi (puisque f s'exprime à l'aide de F). Pour être plus précis, on a même pour tout réel y l'égalité

$$f'(y) = \frac{F'(y+1) - F'(y)}{F(1)} = \frac{f(y+1) - f(y)}{F(1)}.$$

$\blacksquare$

À présent, nous allons rechercher toutes les solutions de l'équation fonctionnelle ($\bigstar$).

73.3 Solutions

Théorème 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. f vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

si et seulement s'il existe une réel a tel que f soit une fonction exponentielle de base a (c'est-à-dire $f(x) = a^x$ pour tout réel x).

démonstration *: Le sens indirect a déjà été démontré. On ne s'intéressera donc plus qu'au sens direct. Puisque f est continue en un point, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème 2. En fixant x, on va dériver l'équation fonctionnelle que vérifie f par rapport à y :*

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(x+y) = f(x) \times f'(y).$$

Prenons alors $y = 1$. Les équivalences suivantes sont valables pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) \times f'(0) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = f'(0) \qquad \textit{car } f(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R} \mid \ \ln f(x) = f'(0)x + k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R} \mid f(x) = e^{f'(0)x}\, e^k. \end{aligned}$$

Or $f(0) = 1 \Rightarrow e^k = 1 \Rightarrow k = 0$. *D'autre part,* $\ln$ *définit une bijection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$, *donc il existe un réel* a *strictement positif tel que* $f'(0) = \ln a$. *On peut alors conclure :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^{x \ln a} = a^x = f_a(x).$$

La démonstration s'achève ici. ■

73.4 Compléments

Théorème 4 : Les seules fonctions continues sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles et qui vérifient l'équation fonctionnelle ($\bigstar$) sont les fonctions exponentielles.

démonstration : *Nous avons déjà vu que les fonctions exponentielles sont solutions de ($\bigstar$). Montrons que ce sont les seules. Soit* $f \in \mathscr{F}^*$ *continue sur* $\mathbb{R}$. *Posons* $f(1) = a$.

◇ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = \big(f(1)\big)^n = a^n$.
◇ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n-n) = f(0) = 1$ *et*

$$f(n-n) = f(n) \times f(-n) \Rightarrow f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n},$$

de sorte que l'égalité $f(n) = a^n$ *soit vraie pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.
◇ *Pour tout* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f(p) = f(q\,\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q$ *d'après ce qui précède. Ainsi, comme* $f(p) > 0$, *on peut élever les deux membres de l'égalité précédente à la puissance* $1/q$, *donnant*

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \big(f(p)\big)^{1/q} = (a^p)^{1/q} = a^{\frac{p}{q}},$$

ce qui montre que l'égalité $f(r) = a^r$ *est vraie pour tout* $r \in \mathbb{Q}$.
◇ *On étend ensuite cette égalité à* $\mathbb{R}$ *grâce à la continuité de* f *sur* $\mathbb{R}$ *et la densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(impliquant donc que tout réel s'écrive comme limite d'une suite de rationnels). Le passage à la limite donnera alors le résultat suivant :* $f(x) = a^x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Ceci démontre non seulement le théorème, mais justifie aussi l'écriture a^x. ■

73.5 Applications

Exercice 1 : Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionelle

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \times f(y).$$

<u>**Solution**</u> : On pose $g(x) = f(x) + 1$ pour tout réel x, de sorte que :

$$g(x+y) = f(x+y) + 1 \quad \text{et} \quad g(x) \times g(y) = \big(f(x)+1\big) \times \big(f(y)+1\big) = f(x) \times f(y) + f(x) + f(y) + 1.$$

Par suite,

$$g(x+y) = g(x) \times g(y) \Leftrightarrow f(x+y) + 1 = f(x) \times f(y) + f(x) + f(y) + 1 \Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x) \times f(y).$$

Or on sait que l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x) \times g(y)$ admet pour solution non identiquement nulle toute fonction exponentielle. Il existe donc $a > 0$ tel que pour tout réel x, $g(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = a^x - 1$. ◇

Exercice 2 : Même question avec l'équation fonctionelle

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) + x + y = \big(f(x)+x\big)\big(f(y)+y\big).$$

Solution : On pose $g(x) = f(x) + x$ pour tout réel x, de sorte que :

$$g(x+y) = f(x+y) + x + y \quad \text{et} \quad g(x) \times g(y) = \big(f(x)+x\big) \times \big(f(y)+y\big).$$

Par suite,

$$g(x+y) = g(x) \times g(y) \Leftrightarrow f(x+y) + x + y = \big(f(x)+x\big) \times \big(f(y)+y\big).$$

Or on sait que l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x) \times g(y)$ admet pour solution non identiquement nulle toute fonction exponentielle. Il existe donc $a > 0$ tel que pour tout réel x, $g(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = a^x - x$. $\diamondsuit$

Exercice 3 : Même question avec l'équation fonctionelle

$$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\times f(y)}.$$

Solution : Remarquons tout d'abord que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = \frac{f(x-x_0)+f(x_0)}{1+f(x-x_0)\times f(x_0)} = \frac{f(x-x_0)+1}{1+f(x-x_0)\times 1} = 1.$$

On pose alors $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, de sorte que

$$g(x+y) = \frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)} \quad \text{et} \quad g(x)\times g(y) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \frac{1+f(y)}{1-f(y)}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
g(x+y) = g(x)\times g(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1+f(x+y)}{1-f(x+y)} = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \frac{1+f(y)}{1-f(y)} \\
&\Leftrightarrow \quad \big(1+f(x+y)\big)\big(1-f(x)-f(y)+f(x)f(y)\big) = \big(1-f(x+y)\big)\big(1+f(x)+f(y)+f(x)f(y)\big) \\
&\Leftrightarrow \quad -f(x)-f(y)+f(x+y)+f(x+y)f(x)f(y) = f(x)+f(y)-f(x+y)-f(x+y)f(x)f(y) \\
&\Leftrightarrow \quad f(x+y)\big(1+f(x)f(y)+1+f(x)f(y)\big) = f(x)+f(y)+f(x)+f(y) \\
&\Leftrightarrow \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.
\end{aligned}$$

Or on sait que l'équation fonctionnelle $g(x+y) = g(x)\times g(y)$ admet pour solution non identiquement nulle toute fonction exponentielle. Il existe donc $a > 0$ tel que pour tout réel x, $g(x) = a^x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}$. $\diamondsuit$