CAPES externe 2011 de Mathématiques
Première composition : CORRIGÉ

Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

Problème 1 : construction de triangles

Dans un plan affine euclidien orienté, on considère deux points distincts $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ et un point $\boldsymbol{M}$ n'appartenant pas à la droite $(\boldsymbol{BC})$.
Pour chacune des assertions suivantes, déterminer s'il existe un point $\boldsymbol{A}$ qui la vérifie.
On précisera pour chaque cas le nombre de solutions et on prendra soin de fournir toutes les explications et justifications utiles.

Soient B, C deux points distincts du plan affine euclidien orienté, et M un autre point tel que $M \notin (BC)$.

1. $\boldsymbol{M}$ est le centre de gravité du triangle $\boldsymbol{ABC}$.

   Il existe une unique solution à ce problème. On construit le milieu I de $[BC]$: il vérifie la relation $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ($\flat$). On construit ensuite le point A tel que $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{IM}$ ($\sharp$). Par suite,

   $$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\underbrace{\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}}_{\overset{(\flat)}{=}\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\overset{(\sharp)}{=}\vec{0}}=\vec{0}.$$

   M est donc bien l'isobarycentre, c'est-à-dire le centre de gravité, du triangle ABC.

2. $\boldsymbol{M}$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $\boldsymbol{ABC}$.

   Il existe une infinité de solution si $\boldsymbol{M}$ est équidistant de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$, et aucune sinon. Supposons un instant que $MB \neq MC$: alors la propriété de la médiatrice nous assure que M ne peut pas se trouver sur celle de $[BC]$, et donc qu'un triangle ABC tel que M soit le centre de son cercle circonscrit n'existe pas.

   Supposons désormais que $MB = MC$. On choisit alors un point A quelconque tel que $MA = MB = MC$, de sorte que la propriété de la médiatrice nous permet de confirmer que M se trouve bien sur les médiatrices de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. M est donc bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. $\boldsymbol{M}$ est l'orthocentre du triangle $\boldsymbol{ABC}$.

   Il existe une unique solution à ce problème. Le demi-cercle de diamètre $[BC]$ coupe respectivement les droites (BM) et (CM) en B' et C'. Puisque les triangles $BB'C$ et $BC'C$ sont tous les deux inscrits dans un cercle dont un diamètre est le côté $[BC]$ de ces triangles, ils sont rectangles. On nomme A l'unique point d'intersection des deux droites (BC') et $(B'C)$ (ce point A existe car les deux droites qui le définissent ne peuvent pas être parallèles). Ainsi, (BM) et (CM) sont deux hauteurs du triangle ABC, et puisque M est l'orthocentre de ce triangle, la droite (AM) est nécessairement la troisième hauteur.

4. $\boldsymbol{M}$ est le centre du cercle inscrit au triangle $\boldsymbol{ABC}$.

   Il existe une unique solution si $\widehat{\boldsymbol{CBM}}+\widehat{\boldsymbol{BCM}} < 90°$, et aucune sinon. Notons B' le symétrique du point B par rapport à la droite (CM) et C' celui de C par rapport à (BM). Supposons pour l'instant que $\widehat{CBM}+\widehat{BCM} \geqslant 90°$. Alors

   $$\widehat{CBC'}+\widehat{BCB'}=2(\widehat{CBM}+\widehat{BCM}) \geqslant 180°.$$

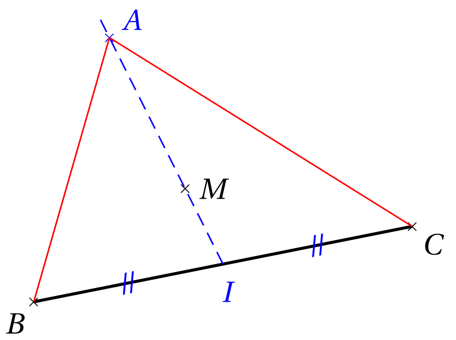
Il est donc impossible que les demi-droites $[BC')$ et $[CB')$ se coupent car si c'était le cas, le point d'intersection A vérifierait la relation

$$\widehat{CBA}+\widehat{BCA}+\widehat{BAC}=\widehat{CBC'}+\widehat{BCB'}+\widehat{BAC}=180°,$$

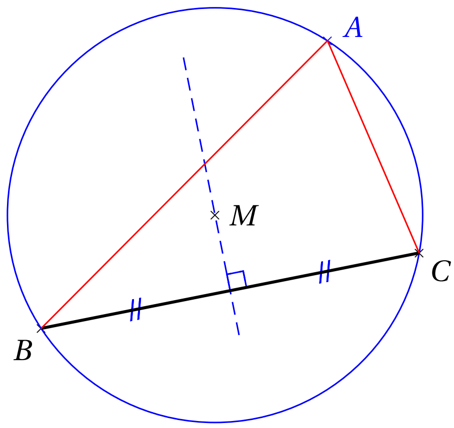
impliquant alors que $180°+\widehat{BAC}\leqslant 180°$, donc que $\widehat{BAC}=180°$, ce qui est absurde car $B\neq C$.

On suppose donc que $\widehat{CBM}+\widehat{BCM}<90°$. Alors les demi-droites $[BC')$ et $[CB')$ se coupent au point A recherché (son existence est assuré par le fait que la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°, et par l'inégalité $\widehat{CBC'}+\widehat{BCB'}<180°$). Par propriété de la symétrie axiale, les droites (BM) et (CM) sont bien les bissectrices intérieures des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$, et M est donc bien le centre du cercle inscrit au triangle ABC. De plus, la droite (AM) est la troisième bissectrice intérieure de ce triangle.

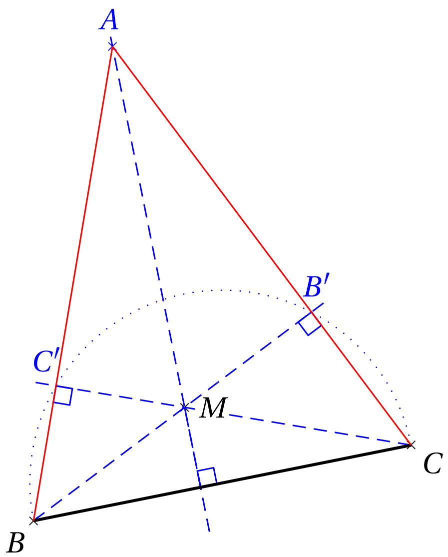
Les différents cas présentés sont illustrés ici :



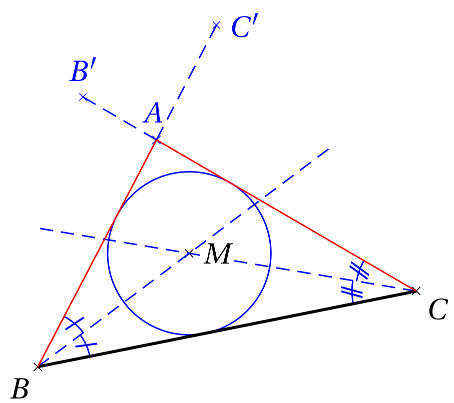
Centre de gravité



Centre du cercle circonscrit



Orthocentre



Centre du cercle inscrit

Problème 2 : autour du théorème des valeurs intermédiaires

> *Darboux[1] systématisera dans son mémoire de 1875 la démarche amorcée dans se correspondance où il expose au coup par coup [...] les propriétés implicites de la pratique commune de la notion de fonction continue.*
> *Il cherche à dégrossir le concept de fonction continue et à le dépouiller de tout ce qui n'est pas strictement induit par sa définition, et que l'« usage », l'activité mathématique passée lui avait donc conféré.L Cauchy[2] avait cassé le cadre fonction continue/fonction analytique. Darboux cherche à casser les assimilations suivantes : fonction continue/fonction monotone, fonction continue entre a et b/fonction qui passe par toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, fonction continue/fonction dérivable.*
> *En réduisant à sa juste mesure la classe des fonctions continues, Darboux donne une réalité, une épaisseur aux classes des fonctions qui ne le sont pas. Il libère le concept de fonction du carcan de la continuité.[3]*

On se propose dans ce qui suit de mettre en lumière quelques points évoqués par le texte précédent.

Partie I : préliminaires

On pourra utiliser les résultats suivants :
- toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure ;
- soient a et b des réels tels que $a < b$; toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes ;
- toute suite croissante et majorée est convergente, toute suite décroissante et minorée est convergente ;
- si deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et si pour tout entier n on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Les résultats suivants sont à démontrer ; ils ne doivent pas être considérés ici comme des propriétés connues.

Numérotons respectivement 1, 2, 3 et 4 les résultats donnés par l'énoncé, utilisables sans justification.

1. Démontrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments décroissante de limite ℓ alors, pour tout entier n, on a $w_n \geqslant \ell$ (*on raisonnera par l'absurde*).

   Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite ℓ. Supposons qu'il existe un entier N pour lequel $w_N < \ell$. Puisque cette suite est décroissante, elle vérifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}, w_{n+1} \leqslant w_n$. On en déduit alors que

$$\forall\, n \geqslant N, \quad w_n \leqslant w_N < \ell.$$

[1] : Gaston Darboux (1842-1917)

[2] : Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

[3] : Principes de l'analyse chez Darboux et Houël : textes et contextes (Hélène Gispert in Revue d'histoire des sciences, 1990, Tome 43, n° 2-3. pp 181-220)

Posons alors $\varepsilon = \dfrac{\ell - w_N}{2}$. Alors, pour tout $n' \in \mathbb{N}$, il existe un entier n vérifiant $n \geqslant n'$ (en effet, il suffit de le choisir plus grand que N) tel que $|w_n - \ell| > \varepsilon$, ce qui contredit la définition de la convergence de la suite (w_n) vers ℓ. On en déduit donc que pour tout entier n, $w_n \geqslant \ell$.

2. ***Théorème des suites adjacentes***

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes, c'est-à-dire telles que :

$$\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante} \\ \text{la suite } (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0. \end{cases}$$

2.1. **Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.**

Soit n un entier naturel. La suite (u_n) est croissante, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (v_n) est décroissante, donc $v_{n+1} \leqslant v_n$. Par suite,

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leqslant 0} - \underbrace{(u_n - u_{n+1})}_{\leqslant 0} \leqslant 0.$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc bien décroissante.

2.2. **En déduire que, pour tout entier n, on a : $v_n - u_n \geqslant 0$.**

La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et admet pour limite 0 (énoncé). D'après la propriété démontrée à la question 1., on a directement que pour tout entier n, $v_n - u_n \geqslant 0$.

2.3. **Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.**

L'inégalité précédente s'écrit aussi $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier n. Par conséquent, pour tout entier n, les variations des suites (u_n) et (v_n) nous permettent d'écrire que :

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \qquad \text{et} \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant v_0.$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0, et la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0. D'après la propriété 3 admise dans l'énoncé, ces suites convergent.

2.4. **Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.**

Puisque les suites (u_n) et (v_n) convergent, nous pouvons conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

3. ***Suite et application continue***

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel ℓ. Soit f une application, définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et continue en ℓ.
Montrer que la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de l'application f en ℓ nous amène à écrire qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $|u_n - \ell| < \eta \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$. De plus, la convergence de la suite (u_n) vers ℓ se traduit par

$$\forall\, \varepsilon' > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \mid n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon'.$$

En particulier, avec $\varepsilon' = \eta$, on aboutit à l'implication $n \geqslant N \Rightarrow |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$.

Partie II : propriété des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b) in I^2$ tel que $a < b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Cette propriété sera notée $\mathscr{P}$ dans la suite.

1. ***Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires***

On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

si f est une application continue de I dans $\mathbb{R}$, alors f possède la propriété $\mathscr{P}$.

Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$; dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée.

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout entier n :

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda, \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda, \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}. \end{cases}$$

1.1. **Justifier que, pour tout entier n, $a_n \in [a,b]$ et $b_n \in [a,b]$.**

On va démontrer par récurrence que $a_n \in [a,b]$, $b_n \in [a,b]$ et $a_n < b_n$:

Initialisation ($n = 0$) : Puisque $a_0 = a$, il est évident que $a_0 \in [a,b]$.

Hérédité : Supposons donc que $a_n, b_n \in [a,b]$ et $a_n < b_n$, et montrons que $a_{n+1} \in [a,b]$ et $a_{n+1} < b_{n+1}$.

– Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors :

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{<} \frac{b_n+b_n}{2} = b_n = b_{n+1} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{>} \frac{a_n+a_n}{2} = a_n.$$

On en déduit que $a_{n+1} > a_n \overset{\text{H.R.}}{>} a$, $a_{n+1} < b_n \overset{\text{H.R.}}{<} b$ (donc que $a_{n+1} \in [a,b]$) et que $a_{n+1} < b_{n+1}$. De plus, $b_{n+1} = b_n \overset{\text{H.R.}}{<} b$ et

$$b_{n+1} = b_n = \frac{b_n + b_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{>} \frac{a_n + a_n}{2} = a_n.$$

On en déduit que $b_{n+1} > a_n \overset{\text{H.R.}}{>} a$, donc que $b_{n+1} \in [a,b]$.

– Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors :

$$a_{n+1} = a_n = \frac{a_n + a_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{<} \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = a_n = \frac{a_n + a_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{<} \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

On en déduit que $a_{n+1} = a_n \overset{\text{H.R.}}{>} a$, $a_{n+1} < b_n \overset{\text{H.R.}}{<} b$ (donc que $a_{n+1} \in [a,b]$) et que $a_{n+1} < b_{n+1}$. De plus,

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{>} \frac{a_n + a_n}{2} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \overset{\text{H.R.}}{<} \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

On en déduit que $b_{n+1} < b_n \overset{\text{H.R.}}{>} b$, $b_{n+1} > a_n \overset{\text{H.R.}}{<} a$ (donc que $a_{n+1} \in [a,b]$).

La récurrence s'achève ici.

1.2. Montrer que, pour tout entier n :

$$\boldsymbol{b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}}.$$

On doit distinguer deux cas :

– Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

– Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Dans les deux cas, l'égalité est démontrée.

1.3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Dans la récurrence précédente, on a démontré que $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc respectivement croissante et décroissante. De plus,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2^1} = \cdots = \frac{b_{n-n} - a_{n-n}}{2^n} = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ces deux suites vérifient donc les trois points de la définition de suites adjacentes : elles le sont donc !

1.4. **Conclure.**

D'après le théorème des suites adjacentes démontré à la question 2, les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite notée c. Puisque la fonction f est supposée être continue sur $[a,b]$, la question 3 nous permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Enfin, puisque pour tout entier n on a $f(a_n) < \lambda$ et $f(b_n) \geqslant \lambda$, le passage à la limite donne

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant \lambda \qquad \text{et} \qquad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant \lambda,$$

et on en déduit que $f(c) = \lambda$. Autrement dit, f possède la propriété $\mathscr{P}$.

2. *Application 1 : un théorème du point fixe*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une application continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$. g est bien sûr continue sur $[a,b]$ et $0 \in g\big([a,b]\big)$. En effet,

$$g(a) = f(a) - a \in g\big([a,b]\big) \qquad \text{et} \qquad g(b) = f(b) - b \in g\big([a,b]\big).$$

Mais puisque $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est-à-dire $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant b$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction g, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, donc $f(c) = c$.

3. *Application 2 : première formule de la moyenne*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$. Montrer que si g est positive sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Supposons que g soit positive sur $[a,b]$, c'est-à-dire que tout réel $x \in [a,b]$ vérifie $g(x) \geqslant 0$.

Premier cas ($g \equiv 0$) : Le résultat est alors immédiat puisque les deux membres de l'égalité sont égaux à 0.

Second cas ($g > 0$) : Supposons donc qu'il existe au moins un réel de $[a,b]$ dont l'image par g soit strictement positive, entraînant ainsi que $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Puisque f est continue sur $[a,b]$, la propriété 2 de l'énoncé (de la partie I) nous assure qu'elle est bornée et atteint ses bornes : notons m sa borne inférieure et M sa borne supérieure. Alors

$$\begin{aligned}
& \forall x \in [a,b], \quad mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \\
\Rightarrow \quad & m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\
\overset{\int g\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant M
\end{aligned}$$

Puisque la fonction f, de par sa continuité, vérifie la théorème des valeurs intermédiaires, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\exists\, c \in [a,b] \quad | \quad \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(c),$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. ***Application 3***

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

4.1. **Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ tel que :**

$$f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right).$$

indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ par

$$f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x).$$

Soient n un entier non nul et f_n la fonction définie sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ par : $f_n(x) = f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)$. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} f_n\left(\frac{i}{n}\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\\
&= f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n-2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\\
&= f(1) - f(0) = 0.
\end{aligned}$$

Nécessairement, il existe $\rho, \tau \in [0, n-1]$ tel que $f_n\left(\frac{\rho}{n}\right) \leqslant 0$ et $f_n\left(\frac{\tau}{n}\right) \geqslant 0$ (sans quoi la somme ne pourrait pas être nulle). Posons alors $x_\rho = \frac{\rho}{n} \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ et $x_\tau = \frac{\tau}{n} \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, de sorte que :

$$f_n(x_\rho) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(x_\tau) \geqslant 0.$$

Puisque f est continue sur $[0,1]$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet d'écrire que

$$\exists\, c_n \in [x_\rho, x_\tau] \subset \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \quad | \; f_n(c_n) = 0,$$

c'est-à-dire $f(c_n) = f\left(c_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

4.2. **Montrer que si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par**

$$\boldsymbol{f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right].}$$

Sachant que f est continue sur $[0,1]$ et vérifie $f(0) = f(1)$, il s'agit de montrer qu'il existe $n \notin \mathbb{N}$ (autrement dit, qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$) tel que pour tout $c \in [0, 1-\alpha]$, on ait $f(c) \neq f(c+\alpha)$.

Utilisons la fonction suggérée par l'énoncé après avoir vérifié qu'elle remplit bien les conditions requises :

✎ La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$ est continue sur cet intervalle en tant que somme de fonctions continues sur cet intervalle ;

✎ $f(0) = \cos(0) - 0\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) = 1$ et $f(1) = \cos\frac{2\pi}{\alpha} - \left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) = 1$.

Soit alors $c \in [0, \alpha]$. Nous avons d'une part que

$$f(c) = \cos\frac{2\pi c}{\alpha} - c\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} f(c+\alpha) &= \cos\frac{2\pi(c+\alpha)}{\alpha} - (c+\alpha)\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) \\ &= \cos\frac{2\pi c}{\alpha}\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} - \sin\frac{2\pi c}{\alpha}\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} - c\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) - \alpha\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) \\ &= \cos\frac{2\pi c}{\alpha} - c\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) - \alpha\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right). \end{aligned}$$

Les deux égalités précédentes nous assurent alors que : $f(c) - f(c+\alpha) = \alpha\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right)$.

Remarquons alors que :

$$\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi}{\alpha} \notin 2\pi\mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{2\pi}{\alpha} \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\left(\cos\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right) \neq 0,$$

et ce résultat injecté dans l'égalité précédente permet de conclure :

$$f(c) - f(c+\alpha) \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(c) \neq f(c+\alpha).$$

Partie III : réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

> *Bien avant Darboux, [. . .] Bolzano[4] avait critiqué comme incorrect l'acceptation du concept de continuité d'une fonction dans le sens où la propriété des valeurs intermédiaires est vérifiée par la fonction. Mais Lebesgue[5] note dans ses leçons sur l'intégration qu'« on avait pris en France l'habitude de définir une fonction continue celle qui ne peut passer d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et l'on considérait cette définition comme équivalente à celle de Cauchy. Darboux, qui construisait dans son "Mémoire" des fonctions dérivées non continues au sens de Cauchy, a pu montrer que les deux définitions de la continuité étaient forts différentes ».[6]*

1. *Un exemple*

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

   Montrer que la fonction f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ mais n'est pas continue en 0.

   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc vérifie la proposition $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{R}^*$. Puisque 0 est une valeur prise par f en 0 et au moins un autre point de $\mathbb{R}^*$, il vient que f vérifie la proposition $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{R}$.

   Si une suite est convergente, alors toute sous-suite converge vers la même limite. Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons

$$x_n = 2n\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{(4n+1)\pi}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

   On constate alors que

$$\sin x_n = \sin(2n\pi) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin y_n = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

   Nous avons trouvé deux suites qui tendent vers la même limite, mais leurs images par la fonction f ne convergent pas vers la même valeur. On en déduit que f n'admet pas de limite en 0 : f n'est pas continue en 0.

2. *Une classe de fonctions qui vérifient $\mathscr{P}$: un théorème de Darboux*

   Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide, et soit $(a, b) \in I^2$ $(a < b)$. On se propose de montrer que f' vérifie $\mathscr{P}$.

   On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

   2.1. Justifier qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x)$.

   Puisque f est dérivable sur $[a, b]$, g est aussi dérivable sur cet intervalle, et donc nécessairement continue. D'après la propriété 2 de l'énoncé (de la partie I), la fonction g est alors bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Autrement dit,

$$\exists\, c \in [a, b] \quad | \quad g(c) = \inf_{x\in[a,b]} g(x).$$

[4] Bernard Bolzano (1781-1848)
[5] Henri Lebesgue (1875-1941)
[6] Gispert, op. cit., p2

2.2. **Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.**

On a déjà vu que g est dérivable sur $[a, b]$, et pour tout x de cet intervalle, on a $g'(x) = f'(x) - \lambda$. Par suite,

$$g'(a) = f'(a) - \lambda \overset{\lambda > f'(a)}{<} 0 \qquad \text{et} \qquad g'(b) = f'(b) - \lambda \overset{\lambda < f'(b)}{>} 0.$$

Supposons alors que g admette son minimum en a. On aurait alors $g(x) - g(a) \geqslant 0$ pour tout $x > a$, c'est-à-dire

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geqslant 0.$$

La passage à la limite dans cette inégalité nous donnerait alors $g'(a) \geqslant 0$, ce qui est contradictoire. On montre de la même manière que g n'admet pas son minimum en b et on en conclut que $c \neq a$ et $c \neq b$.

2.3. **Conclure.**

Le minimum de g est donc atteint pour un point $c \in]a, b[$, ce qui implique que $g'(c) = 0$, donc que $f'(c) = \lambda$. Pour synthétiser, f' est une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non-vide ; pour tout $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$ et pour tout réel $\lambda \in]f'(a), f'b)[$ (en supposant $f'(a) < f'(b)$), on a prouvé qu'il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = \lambda$:

$$f' \text{ vérifie la propriété } \mathscr{P}.$$

2.4. **En déduire un exemple d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui ne possède pas de primitive sur $\mathbb{R}$.**

Considérons la fonction partie entière E définie sur $\mathbb{R}$. Supposons un instant qu'elle admette une primitive notée ξ sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction ξ', donc la partie entière E, vérifierait la propriété $\mathscr{P}$ d'après ce que nous venons de voir. Ce n'est pas le cas, car si l'on choisit $a = 0$, $b = 1$, $\lambda = \frac{3}{2} \in [E(0), E(1)] = [0, 1]$, on aura $f(c) \neq \lambda$ pour tout $c \in [0, 1]$, et on aboutit à une contradiction prouvant ainsi que la fonction partie entière définir sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

3. ***Une condition pour qu'une fonction qui vérifie $\mathscr{P}$ soit continue***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide et telle que :

- **f vérifie $\mathscr{P}$,**
- **pour tout $x \in I$, $f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$ est fermé dans I.**

Montrer que f est continue sur I.

Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas continue, par exemple en $0 \in I$. Il existe alors une suite (x_n) d'éléments de I qui converge vers 0 tout en vérifiant, pour un certain $\varepsilon > 0$,

$$|f(x_n) - f(0)| > \varepsilon.$$

La fonction f vérifiant la propriété $\mathscr{P}$, il vient que $\exists\ y_n \in [0, x_n] \mid f(y_n) = f(0) + \varepsilon$. En passant à la limite dans cette égalité, on trouve finalement que $\varepsilon = 0$, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, la fonction f est bien continue sur $[a, b]$.

Problème 3 : quelques propriétés des polynômes de Laguerre[7]

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$h_n(x) = x^n\, e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\, h_n^{(n)}(x).$$

Partie I : étude de la famille (L_n)

1. **Justifier les écritures précédentes, c'est-à-dire que L_n est bien définie pour tout entier n.**

   Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n, donc la fonction $x \mapsto x^n\, e^{-x}$ aussi, et l'on peut ainsi la dériver autant de fois que l'on veut, en particulier n fois. Enfin, puisque $n! \neq 0$, les L_n sont bien définis pour tout entier n.

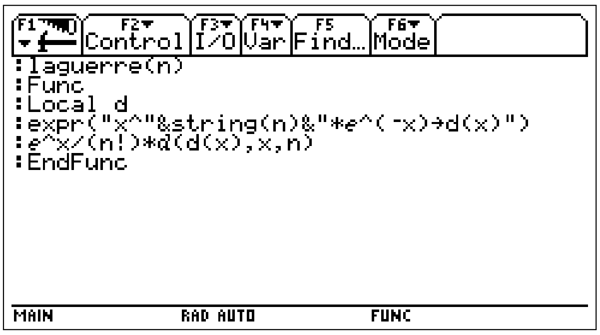
2. **Calculer L_0, L_1 et L_2 explicitement.**

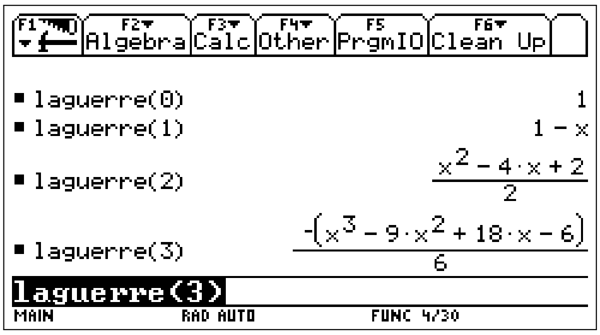
   On a :

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{e^x}{0!}\, h_0^{(0)}(x) = e^x\, e^{-x} = 1. \\
L_1(x) &= \frac{e^x}{1!}\, h_1^{(1)}(x) = e^x\,(e^{-x} - x\,e^{-x}) = e^x\, e^{-x}(1-x) = -x+1. \\
L_2(x) &= \frac{e^x}{2!}\, h_2^{(2)}(x) = \frac{e^x}{2}(2xe^{-x} - x^2e^{-x})' = \frac{e^x}{2}(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.
\end{aligned}$$

3. **En précisant le logiciel de calcul formel ou le modèle de calculatrice utilisé, écrire une procédure permettant d'afficher L_n pour une valeur de n donnée.**

   J'ai utilisé une TI-Voyage 200 en anglais (je suis toujours habitué à la programmation en anglais sur ma TI-89…) pour faire la procédure demandée :





   J'ai décidé de créer une fonction plutôt qu'un programme afin que le résultat soit exploitable par la calculatrice. La suite après "`Local d`" permet simplement de créer une fonction d utilisable par la fonction `laguerre`. L'avant-dernière ligne est celle qui renvoie le résultat !

[7] Edmond Laguerre (1834-1886)

4. **Montrer que pour tout entier n, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.**
Dans toute la suite, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

On utilise la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}(x^n e^{-x})^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (e^{-x})^{(i)} (x^n)^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e^{-x} \binom{n}{i} \frac{n!}{i!} x^{n-(n-i)} \\ \Rightarrow \qquad L_n(x) &= \frac{e^x}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e^{-x} \binom{n}{i} \frac{n!}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{i!} x^i.\end{aligned}$$

On constate bien que L_n est une fonction polynomiale. De plus, lorsque $i = n$, on a

$$(-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{i!} = (-1)^n \binom{n}{n} \frac{1}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0,$$

donc L_n est une fonction polynomiale de degré n.

5. **Soit $n \in \mathbb{N}$.**

5.1. **Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L'_n.**

On a $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) \Leftrightarrow h_n^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{e^x} L_n(x)$, et par suite on a aussi :

$$\begin{aligned} & L'_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) + \frac{e^x}{n!} h_n^{(n+1)}(x) = L_n(x) + \frac{e^x}{n!} h_n^{(n+1)}(x) \\ \Leftrightarrow \quad & h_n^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{e^x} \big(L'_n(x) - L_n(x)\big).\end{aligned}$$

5.2. **Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.**

Pour tout réel x, on a que $h_{n+1}(x) = x^{n+1} e^x = x\, x^n e^x = x\, h_n(x)$, prouvant ainsi que $h_{n+1} = X\, h_n$.

5.3. **En déduire que : $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L'_n + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n$.**

En utilisant la relation $h_{n+1} = X\, h_n$ et la formule de Leibniz, on trouve :

$$h_{n+1}^{(n+1)} = (X\, h_n)^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} X^{(i)}\, h_n^{(n+1-i)} = X\, h_n^{(n+1)} + (n+1)\, h_n^{(n)}.$$

En effet, pour tout entier $i \geqslant 2$, $X^{(i)} = 0$. Par suite, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} L_{n+1}(x) &= \frac{e^x}{(n+1)!} h_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= \frac{e^x}{(n+1)!} \big(x\, h_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, h_n^{(n)}(x)\big) \\ &= \frac{x}{n+1} \frac{e^x}{n!} h_n^{(n+1)}(x) + \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) \\ &\overset{5.1.}{=} \frac{x}{n+1} \frac{e^x}{n!} \left(\frac{n!}{e^x} \big(L'_n(x) - L_n(x)\big)\right) + \frac{e^x}{n!} \left(\frac{n!}{e^x} L_n(x)\right) \\ &= \frac{x}{n+1} L'_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x).\end{aligned}$$

6. **En remarquant que $\left(h'_{n+1}\right)^{(n+1)} = \left((h_{n+1})^{(n+1)}\right)'$, montrer la relation**

$$\boldsymbol{L'_{n+1} = L'_n - L_n.}$$

On considère toujours $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
L'_{n+1}(x) &= \left(\frac{e^x}{(n+1)!}\, h_{n+1}^{(n+1)}(x)\right)' \\
&= \frac{e^x}{(n+1)!}\, h_{n+1}^{(n+1)}(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}\left(h_{n+1}^{(n+1)}(x)\right)' \\
&= L_{n+1}(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}\left(h_{n+1}(x)'\right)^{(n+1)} \\
&= L_{n+1}(x) + \frac{e^x}{(n+1)!}\left((n+1)x^n\, e^{-x} - x^{n+1}\, e^{-x}\right)^{(n+1)} \\
&= L_{n+1}(x) + \frac{e^x}{n!}\, h_n^{(n+1)}(x) - \overbrace{\frac{e^x}{(n+1)!}\, h_{n+1}^{(n+1)}(x)}^{=L_{n+1}(x)} \\
&\overset{5.1.}{=} \frac{e^x}{n!}\left(\frac{n!}{e^x}\left(L'_n(x) - L_n(x)\right)\right) \\
&= L'_n(x) - L_n(x).
\end{aligned}$$

7. **En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :**

$$\boldsymbol{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X\, L''_n + (1-X)L'_n + n\, L_n = 0}$$

et que :

$$\boldsymbol{\forall\, n \geqslant 1, \quad (n+1)L_{n+1} + (X - 2n - 1)L_n + n\, L_{n-1} = 0.}$$

Montrons d'abord la première égalité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\binom{n}{i} X^i$, on a :

$$\begin{aligned}
L'_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\binom{n}{i}\, i X^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{(i-1)!}\binom{n}{i} X^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\binom{n}{i+1} X^i, \\
\text{et} \quad X\, L''_n &= X \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\binom{n}{i+1}\, i X^{i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!}\binom{n}{i+1} X^i.
\end{aligned}$$

Par suite, toujours pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
& X\, L''_n + (1-X)L'_n + n\, L_n \\
={}& \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!}\binom{n}{i+1} X^i + (1-X)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\binom{n}{i+1} X^i + n \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\binom{n}{i} X^i \\
={}& \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!}\binom{n}{i+1} + \frac{(-1)^{i+1}}{i!}\binom{n}{i+1} - \frac{(-1)^i}{(i-1)!}\binom{n}{i} + n\frac{(-1)^i}{i!}\binom{n}{i}\right) X^i \\
& \underbrace{-n - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} X^n + n + n\frac{(-1)^n}{n!} X^n}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(X L_n'' + (1-X)L_n' + n L_n\big)\\
= &\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg(-\frac{1}{(i-1)!}\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} - \frac{1}{i!}\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} - \frac{1}{(i-1)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}\\
&+ \frac{n}{i!}\frac{n!}{i!(n-i)!}\Bigg)(-1)^k X^i\\
= &\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{(i-1)!}\frac{n!}{i+1} - \frac{1}{i!}\frac{n!}{i+1} - \frac{1}{(i-1)!}\frac{n!}{(n-i)} + \frac{n}{i!}\frac{n!}{(n-i)}\right)\frac{(-1)^k}{i!(n-i-1)!}X^i\\
= &\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\frac{1}{i+1} - \frac{1}{n-i} + \frac{n}{i}\frac{1}{(n-i)}\right)\frac{(-1)^k\, n!}{i!(n-i-1)!(i-1)!}X^i\\
= &\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{-i-1}{i(i+1)} - \frac{i-n}{i(n-i)}\right)\frac{(-1)^k\, n!}{i!(n-i-1)!(i-1)!}X^i\\
= &\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{i} + \frac{1}{i}\right)\frac{(-1)^k\, n!}{i!(n-i-1)!(i-1)!}X^i\\
= &\ 0.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant la seconde égalité : on a

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(x) &= \frac{e^x}{(n+1)!}\,h_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!}\big(h_{n+1}(x)'\big)^{(n)}\\
&= \frac{e^x}{(n+1)!}\big((n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1}e^{-x}\big)^{(n)}\\
&= \frac{e^x}{(n+1)!}(n+1)\,h_n^{(n)}(x) - \frac{e^x}{(n+1)!}(x\cdot x^n e^{-x})^{(n)}\\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} L_n(x) - \frac{e^x}{(n+1)!}\,x h_n^{(n)}(x) - \frac{e^x}{(n+1)!}\,n h_n^{(n-1)}(x)\\
&= L_n(x) - \frac{x}{n+1}\,L_n(x) - n e^x\frac{1}{(n+1)!}\,h_n^{(n+1)}(x).
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,h_n^{(n)}(x) = \frac{e^x}{n!}(x^n e^{-x})^{(n)} &= \frac{e^x}{n!}(nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x})^{(n-1)}\\
&= \frac{e^x}{(n-1)!}\,h_{n-1}^{(n-1)}(x) - \frac{e^x}{n!}\,h_n^{(n-1)}(x)\\
&= L_{n-1}(x) - \frac{e^x}{n!}\,h_n^{(n-1)}(x)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad h_n^{(n-1)}(x) = \frac{n!}{e^x}\big(L_{n-1} - L_n(x)\big),$$

donc finalement, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
& L_{n+1}(x) = L_n(x) - \frac{x}{n+1}L_n(x) - \frac{n}{n+1}\big(L_{n-1}(x) - L_n(x)\big)\\
\Leftrightarrow\ & (n+1)L_{n+1}(x) = (n+1)L_n(x) - xL_n(x) - n\big(L_{n-1}(x) - L_n(x)\big)\\
\Leftrightarrow\ & (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)\\
\Leftrightarrow\ & (n+1)L_{n+1}(x) + (x-2n-1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Partie II : application à un calcul de somme de coefficients binomiaux

1. **En utilisant la formule de Leibniz, déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme L_n.**

   Cette question a déjà été traitée dans la question 4 de la partie I, où l'on avait trouvé :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \binom{n}{i} x^i.$$

2. 2.1. **Soient n un entier naturel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = x^{n+2} \sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right) \qquad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Démontrer que f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 mais que f' n'admet pas de développement limité à l'ordre 0 en 0.

On remarque que pour tout réel $x \neq 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{x^{n+2}\sin\left(\dfrac{1}{x^{n+1}}\right)}{x^{n+1}} = x\,\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = o(x^{n+1}).$$

Par conséquent, f admet bien un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0.

Cependant, et toujours pour $x \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (n+2)x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) + x^{n+2}\left(-\frac{(n+1)x^n}{x^{2n+2}}\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)\right) \\ &= (n+2)x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1)\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

f' n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0 (en étant différent de 0), et ne tend donc pas vers 0. Par suite, f' n'est pas continue en 0, et n'admet donc pas de développement limité à l'ordre 0 en ce point.

2.2. **Soient f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0, et k un entier naturel tel que $k \leqslant n$. Donner une condition suffisante pour que $f^{(n-k)}$ admette un développement limité à l'ordre k en 0.**

Il suffit qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et que $f^{(n)}(0)$ existe. En effet, sous cette hypothèse, la fonction f est $n-k$ fois dérivable (car $k \leqslant n$), et la dérivée $f^{(n-k)}$ est donc de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et existe en 0.

Pour $k \geqslant 1$, grâce au théorème de Taylor-Young, son développement limité à l'ordre k en 0 existe, et cette existence nous assure même (par un autre théorème) que la partie régulière du développement limité à l'ordre k en 0 de $f^{(n-k)}$ est la dérivée du développement limité à l'ordre n en 0 de f.

Si $k = 0$, alors $f^{(n)}(0)$ existe ne suffit pas à dire que $f^{(n)}$ admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Il faut alors rajouter la condition que $f^{(n)}$ soit continue en 0.

En conclusion, il suffit que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et que la dérivée $f^{(n)}$ soit continue en 0. Il aurait aussi suffit que f soit développable en série entière (afin de pouvoir dériver terme à terme), mais la condition précédente est la plus faible.

3. **On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant n$.**

3.1. **Déterminer le développement limité à l'ordre $n+N$ en 0 de h_n.**

Au voisinage de 0, on sait que :

$$e^x = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} x^p + o(x^N).$$

Par conséquent, on a aussi

$$e^{-x} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} (-x)^p + o(x^N) = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{p!} x^p + o(x^N).$$

Finalement, le développement limité de h_n à l'ordre $n+N$ en 0 est :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} = x^n \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{p!} x^p + o(x^N) = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{p!} x^{n+p} + o(x^{n+N}).$$

3.2. **En déduire le développement limité à l'ordre N en 0 de $h_n^{(n)}$.**

Un théorème, partant de la supposition qu'une fonction f admette un développement limité à l'ordre $n \geqslant 1$ en 0, nous dit que si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0, alors la partie régulière du développement limité de f' est la dérivée de celle de f.

Puisque f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, la question II.2.2 nous assure que $h_n^{(n+N-N)} = h_n^{(n)}$ (en prenant "$n = n+N$" et "$k = N$") admet un développement limité à l'ordre N en 0. Le théorème énoncé précédemment nous permet alors d'écrire que

$$h_n^{(n)} = \sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{(n+p)!}{(n+p-n)!} x^{n+p-n} + o(x^{n+N-n}) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{(n+p)!}{(p!)^2} x^p + o(x^N).$$

3.3. **Montrer alors que l'on a au voisinage de 0 :**

$$\boldsymbol{L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p x^p + o(x^N), \qquad \text{où } \forall\, p \in [\![0,N]\!], c_p = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}.}$$

Des résultats précédents, on peut appliquer le produit de Cauchy : notons que les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $h_n^{(n)}$ sont développables en série entière de rayon de convergence $+\infty$. On a alors au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= \frac{1}{n!}\, e^x\, h_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\, h_n^{(n)}(x)\, e^x \\
&= \frac{1}{n!}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\, \frac{(n+p)!}{(p!)^2}\, x^p\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\, x^p\right) \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(n+k)!}{(k!)^2}\, \frac{1}{(p-k)!}\, x^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!\, n!}\, \frac{1}{k!\,(p-k)!}\, x^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!\,\big((n+k)-k\big)!}\, \frac{p!}{k!\,(p-k)!}\, \frac{1}{p!}\, x^p \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{p}{k}\, x^p
\end{aligned}$$

Pour $p \in [\![0, N]\!]$, en posant $c_p = \dfrac{1}{p!}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k}\binom{p}{k}$, on obtient donc

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{N} c_p\, x^p + o(x^N).$$

3.4. **En déduire que pour tout entier $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$:**

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k}\binom{p}{k} = \begin{cases} (-1)^p \dbinom{n}{p} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n, \\ 0 & \text{si } p > n. \end{cases}$$

Notons déjà que si $p > n$, alors $c_p = 0$ puisque L_n est un polynôme de degré n (question I.4). Supposons donc $p \in [\![0, n]\!]$, et rappelons le résultat de la question II.1 :

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} \binom{n}{p}\, x^p.$$

Par identification des coefficients lorsque $N = n$, on obtient alors

$$c_p = \frac{(-1)^p}{p!}\binom{n}{p} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{p!}\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k}\binom{p}{k} = \frac{(-1)^p}{p!}\binom{n}{p}$$

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k}\binom{p}{k} = (-1)^p \binom{n}{p},$$

d'où le résultat attendu.

Partie III : étude des polynômes de Laguerre comme base orthonormée

Pour tous P et Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. **Montrer que φ est bien définie.**

   Supposons que le polynôme PQ soit de degré $n \geqslant 1$. Alors, par croissances comparées, on a les implications suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+2}\,e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \Rightarrow P(x)Q(x)e^{-x} = o\left(\frac{x^n}{x^{n+2}}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

   Or $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_1^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ aussi, et c'est donc nécessairement aussi le cas de $\varphi(P,Q)$.

2. **Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.**

   Il s'agit de montrer les quatre points suivants :

   Bilinéaire : Soient $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la linéarité de l'intégrale nous assure que

$$\begin{aligned}
(\lambda P_1 + \mu P_2, Q) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P_1 + \mu P_2)(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} P_1(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x + \mu \int_0^{+\infty} P_2(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda\varphi(P_1, Q) + \mu\varphi(P_2, Q).
\end{aligned}$$

   On montre de la même manière que φ est linéaire par rapport à la seconde variable.

   Symétrique : Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ nous permet d'écrire que

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \varphi(Q,P).$$

   Positive : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{P^2(x)}_{\geqslant 0}\underbrace{e^{-x}}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

   Définie : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(P,P) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 \\
&\overset{P^2(x)e^{-x}\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \quad P^2(x)e^{-x} = 0
\end{aligned}$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité $e^{-x} > 0$ entraîne directement que $P^2(x) = 0$, donc $P(x) = 0$. Or un polynôme ayant une infinité de racines étant nul, on en déduit finalement que $P(x) = 0$ pour tout réel x.

   Il s'en suit que φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. **Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.**

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, puisque $L_0(x) = 1$ (question I.2), on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(L_0, X^n) &= \int_0^{+\infty} x^n\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[x^n(-e^{-x})\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} n\, x^{n-1}(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \varphi(L_0, X^{n-1}).
\end{aligned}$$

   La seconde égalité a été obtenue par intégration par parties en posant $u(x) = x^n$ et $v'(x) = e^{-x}$, impliquant alors que $u'(x) = n\,x^{n-1}$ et $v(x) = -e^{-x}$. Notons que cette intégration est permise car u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Montrons alors par récurrence sur l'entier n que $\varphi(L_0, X^n) = n!$:
   Initialisation ($n = 0$) : On a $\varphi(L_0, X^0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
   Hérédité : Supposons le résultat vérifié au rang n et montrons qu'il encore vrai au rang $n+1$:

$$\varphi(L_0, X^{n+1}) = (n+1)\,\varphi(L_0, X^n) \overset{\text{H.R.}}{=} (n+1)\; n! = (n+1)!$$

   Finalement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\varphi(L_0, X^n) = n!$.

4. 4.1. **Montrer que : $\forall\, k \in [\![0, n]\!], \exists\, Q_k \in \mathbb{R}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}\, e^{-x}\, Q_k(x)$.**

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
h_n^{(k)}(x) &= \left(x^n\, e^{-x}\right)^{(k)} \\
&\overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x_n)^{(i)} \left(e^{-x}\right)^{(k-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-i}\; (-1)^{k-i}\, e^{-x} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{n!}{i!(n-i)!}\; i!\, x^{n-k+(k-i)}\; (-1)^{k-i}\, e^{-x} \\
&= x^{n-k}\, e^{-x} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i}\binom{n}{i}\; i!\, x^{k-i}.
\end{aligned}$$

   En posant $Q_k(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i}\binom{n}{i}\; i!\, x^{k-i}$ pour tout réel x, on arrive bien au résultat demandé.

   4.2. **Établir que :**

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathbb{R}[X],\ \forall\, p \in [\![0, n]\!], \quad \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)\; P^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Soient $n \geqslant 1$ un entier, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in [\![0, n]\!]$. Montrons le résultat demandé par récurrence sur l'entier p :

Initialisation ($p = 0$) : On a

$$\begin{aligned}\varphi(L_n, P) &= \int_0^{+\infty} L_n(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{n!}\,h_n^{(n)}(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n)}\,P(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^0}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-0)}\,P^{(0)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang p, et montrons qu'il l'est encore au rang $p+1$:

$$\begin{aligned}\varphi(L_n, P) &\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)\,P^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \frac{(-1)^p}{n!}\left(\underbrace{\left[P^{(p)}(x)\,h_n^{(n-p-1)}(x)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p-1)}(x)\,P^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{(-1)^{p+1}}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-(p+1))}(x)\,P^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité $(*)$ est justifiée par une intégration par parties utilisant les fonctions $u(x) = P^{(p)}(x)$ et $v(x) = h_n^{(n-p)}(x)$, impliquant que $u'(x) = P^{(p+1)}(x)$ et $v(x) = h_n^{(n-p-1)}(x)$. Il est important de noter que les fonctions u et v sont toutes les deux de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci achève donc notre récurrence, et l'on note qu'on a en particulier, pour tout entier naturel n,

$$\varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)\,P^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (\diamond)$$

5. **En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $L_n \in \mathbb{R}[X]$ (question I.4), l'égalité $(\diamond)$ nous donne

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)\,L_n^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or : $L_n(x) \overset{\text{II.1}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\binom{n}{i} x^i \Rightarrow L_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\binom{n}{n} n! = (-1)^n$, d'où

$$\varphi(L_n, L_n) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} (-1)^n\,h_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n!}\,\varphi(L_0, X^n) \overset{\text{III.3}}{=} 1.$$

Soit maintenant $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors

$$\varphi(L_n, L_k) \overset{(\diamond)}{=} \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)\,L_k^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $\deg(L_k) = k < n$, donc $L_k^{(n)}(x) = 0$ pour tout réel x, entraînant ainsi que $\varphi(L_n, L_k) = 0$.

Finalement, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.