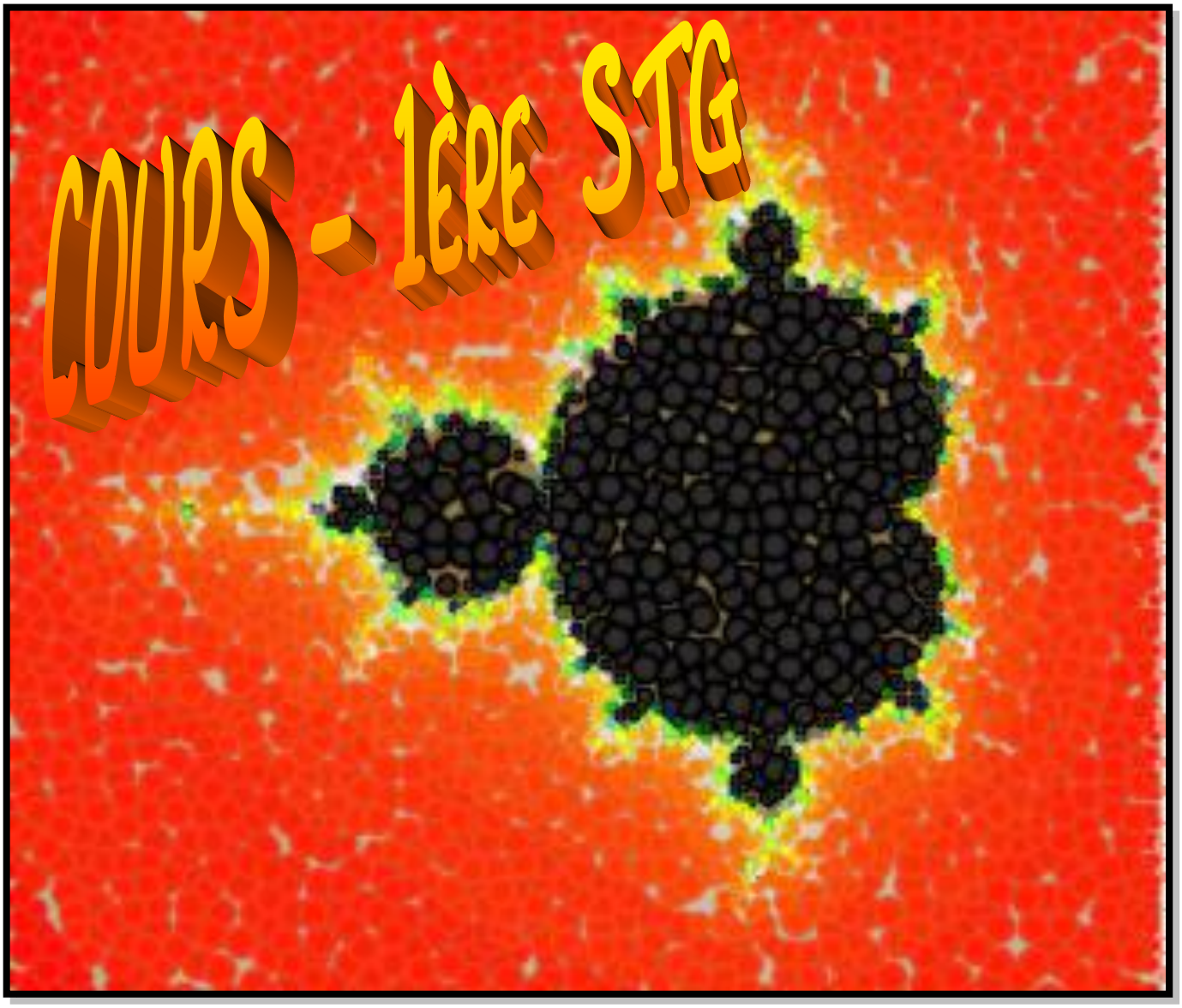
Lycée Adrien Zeller

4, place du Château
67330 BOUXWILLER



réalisé par M. LENZEN. Également disponible en consultation sur son site internet

http://www.capes-de-maths.com/

01 48 37 58 91

01 48 35 17 15

webmaster@capes-de-maths.com

Afin de contribuer au respect de l'environnement, merci de n'imprimer ce manuel que si nécessaire.

Ce document est sous contrat Creative Commons.

L’illustration en page 1 représente le fractale de Mandelbrot,
dont l’image a été retouché par le logiciel Word 2010,
utilisé pour l’intégralité de ce cours.

SOMMAIRE

1 Pourcentages 5

I –Lien entre proportion et pourcentage 5
II – Évolutions 6

2 Fonctions (partie 1) 9

I – Rappels et approfondissements 9
II – Variations d'une fonction 11
III – Résolutions graphiques (équations, inéquations) 12

3 Statistiques 13

I – Rappel du vocabulaire 13
II – Représentations 14
III – Répartitions en classe (variables quantitatives continues) 15
IV – Paramètres statistiques 16
V – Fréquences conditionnelles 18

4 Équations & inéquations 19

I – Résolution d'une équation 19
II – Intervalles de $\mathbb{R}$ pour la réunion et l'intersection 20
II – Résolution d'une inéquation 21

5 Fonctions (partie 2) 23

Fonctions de référence 23

6 Suites numériques 25

I – Définitions 25
II – Sens de variations 26
III – Suites arithmétiques 26
IV – Suites géométriques 27

7 Systèmes d'équations 29

I – Lien entre système d'équations et droites 29
II – Méthodes de résolution 30

8 Tangente & nombre dérivé 33

I – Tangente et coefficient directeur 33
II – Dérivées de fonctions 34
III – Sens de variation 35
IV – Les coûts marginaux 35

9 Probabilités 37

I – Vocabulaire ensembliste 37
II – Probabilité : définition et propriété 38
III – Équiprobabilité 39
IV – Fréquences 39

Chapitre 1 ~ Pourcentages

I – Lien entre proportion et pourcentage

1. Proportion

Définition

On considère deux ensembles : A (avec *a* éléments) et B contenu dans A (avec *b* éléments).
On appelle proportion de B par rapport à A le nombre $\frac{b}{a} = \frac{\text{nombre d'éléments de B}}{\text{nombre d'éléments de A}}$.

Exemples :

- *Dans cette 1ère STG 2 de 20 élèves, il y a 14 filles. Proportion de filles parmi ces élèves :* $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$.
- *Dans ce lycée qui compte actuellement 630 élèves, 20 élèves sont en 1ère STG 2. On en déduit donc que la proportion d'élèves de 1ère STG 2 dans ce lycée vaut* $\frac{20}{630} = \frac{2}{63}$.
- *Pouvez-vous exprimer la part de filles en 1ère STG 2 dans ce lycée ?*

Remarques

* Cette part, ou proportion, peut aussi être exprimée en pourcentage en multipliant le nombre trouvé par 100. Il faudra néanmoins souvent l'arrondir : on compte donc 70 % de filles en 1ère STG 2 ; 3,17 % des élèves du lycée sont en 1ère STG 2 et 2,22 % des élèves de ce lycée sont des filles en 1ère STG 2.
* Une proportion est toujours un nombre réel compris entre 0 et 1 (ATTENTION : « pourcentage » veut bien dire qu'on divise par 100, et correspond donc bien à un nombre entre 0 et 1).

	En classe : 1, 3, 4, 7, 9 p. 24	Exercices : 2, 5, 6, 8 p. 24 + 11 p. 25

2. Pourcentages de pourcentages

Propriété

Soient trois ensembles C ⊂ B ⊂ A ayant respectivement *c*, *b* et *a* éléments.
Si C représente *p* % de B et B représente *q* % de A, alors

$$\text{C représente } \frac{p \times q}{100} \text{ \% de A.}$$

C représente p % de B signifie mathématiquement que $c = \frac{p}{100} \times b$. De même, B représente q % de A signifie que $b = \frac{q}{100} \times a$. On en déduit donc que $c = \frac{p}{100} \times \frac{q}{100} \times a = \frac{p \times q}{100} \times \frac{1}{100} \times a = \frac{p \times q}{100} \div 100 \times a = \frac{\frac{p \times q}{100}}{100} \times a$.
C représente donc bien $\frac{p \times q}{100}$ % de A. On a utilisé une propriété de collège : « Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse », qui fonctionne aussi dans l'autre sens !

Exemple : D'après la remarque précédente, les filles représentent 70 % des élèves de 1ère STG 2, et les élèves de 1ère STG 2 représentent 3,17 % des élèves du lycée. Par conséquent,

$$\frac{70 \times 3{,}17}{100} = \frac{221{,}9}{100} \approx 2{,}2 \text{ \% des élèves du lycée sont des filles de 1ère STG 2.}$$

ATTENTION

Il faut faire attention aux ensembles :
*** 70 % des élèves de 1ère STG 2 sont des filles**
*** 2,2 % des élèves du lycée sont des filles en 1ère STG 2 !**

	En classe : 18 p. 25 + 20, 25 p. 26	Exercices : 19, 21, 24 p. 26

3. Réunion d'ensembles

Propriété

Soient E un ensemble, et A, B deux parties disjointes de cet ensemble. Si a désigne la proportion de A par rapport à E, et b celle de B par rapport à E, alors la proportion de $A \cup B$ par rapport à E est égale à $a + b$.

Si A et B sont disjoints, leurs effectifs s'additionnent lorsqu'on considère $A \cup B$. Par conséquent, la proportion de $A \cup B$ par rapport à E est égale à

$$\frac{\text{nombre d'éléments de } A \cup B}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} + \frac{\text{nombre d'éléments de } B}{\text{nombre d'éléments de } E} = a + b.$$

Exemple : En étudiant les dates de naissance (on suppose pour l'exemple que tout le monde est né la même année), on aboutit au tableau suivant :

Mois de naissance	*J*	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*	*Total*
Effectif	*2*	*2*	*0*	*3*	*0*	*2*	*3*	*3*	*1*	*0*	*1*	*3*	*20*
Fréquence	*10 %*	*10 %*	*0 %*	*15 %*	*0 %*	*10 %*	*15 %*	*15 %*	*5 %*	*0 %*	*5 %*	*15 %*	*100 %*

On peut en déduit que 10 + 10 + 0 + 15 + 0 + 10 = 45 % des élèves sont nés la première moitié de l'année et 55 % des élèves la deuxième moitié de l'année. Chaque mois est « distinct » puisqu'un élève ne peut pas être né à deux dates différentes !

	En classe : **14, 15 p. 25**	**Exercices :** **16, 17 p. 25**

II – Évolutions

1. Évolutions simples

Propriété

- **Augmenter une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$;**
- **Diminuer une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$;**
- **Si une quantité passe d'une valeur i à une valeur f, alors le pourcentage de variation est égal à**

$$\frac{f - i}{i} \times 100.$$

Exemples :

- *En juin, il y avait 2,720 millions de chômeurs en France. En juillet, le chômage a augmenté de 1,3 %.*
  → *Le nombre de chômeurs en juillet est donc égal à* $2{,}720 \times \left(1 + \frac{1{,}3}{100}\right) = 2{,}720 \times 1{,}013 = 2{,}756$ *millions.*
- *Un magnifique ordinateur affiché 699 € est soldé de 30 %. Quel sera le prix payé en caisse ?*
  → *Le prix payé en caisse sera égal à* $699 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) = 699 \times 0{,}7 = 489{,}3$ *€.*
- *L'année dernière, la moyenne de l'une des classes du professeur est tombée de 13,5 à 10,3 du premier au troisième trimestre. La variation est égale à* $\frac{10{,}3 - 13{,}5}{13{,}5} \times 100 = \frac{-3{,}2}{13{,}5} \times 100 \approx -23{,}7$ *%.*
  → *La moyenne a donc chutée (le signe « – » indique une baisse) de 23,7 %.*

Remarque

Le schéma « prix initial $\xrightarrow{+\,p\,\%}$ prix final » sera donc analogue à « prix initial $\xrightarrow{\times\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ prix final ». Le nombre 1 + p/100 (ou 1 – p/100 s'il s'agit d'une baisse) sera appelé dans la suite **coefficient multiplicateur**.

	En classe : 26, 27 p. 26 + 31 p. 27	Exercices : 28 p. 26 + 29, 32, 33 p. 27

2. Évolutions successives

Propriété

Si une quantité évolue une première fois de p % (de coefficient multiplicateur 1 + p/100) puis de q % (de coefficient multiplicateur 1 + q/100), l'évolution totale est de coefficient multiplicateur

$$\frac{1+p}{100}\times\frac{1+q}{100}.$$

Exemple : Du premier contrôle au second, la moyenne de classe a progressé de 6 %. Les résultats ont chuté de 4 % au troisième contrôle. Quel a été l'évolution globale entre le 1er et le 3e contrôle.

→ *Le premier coefficient multiplicateur est* $1+\frac{6}{100}=1{,}06$. *Le second est* $1-\frac{4}{100}=0{,}96$. *L'évolution totale est donc de coefficient multiplicateur* $1{,}06\times0{,}96=1{,}0176$. *Quel est le pourcentage correspondant ?*

Remarque

- Les évolutions successives ne s'additionnent, ne se soustraient pas, ne se divisent pas. Il faut toujours passer par une multiplication.

Exercice : Si un article dans un magasin subit une hausse de 20 % en juin, puis une baisse de 20 % en juillet, est-ce que l'article revient à son prix initial ?

	En classe : 36, 39 p. 27	Exercices : 37, 38 p. 27

3. Évolutions réciproques

À ce stade du chapitre, les performances des élèves sont diminuées (par la fatigue) de 22%. Quel doit alors être le pourcentage d'augmentation pour revenir à l'état de performances initial ??

Étudions ce problème méthodiquement : notons P_1 le niveau de performances des élèves au début du chapitre, P_2 celui à ce stade du chapitre. D'après ce que nous avons vu, nous passons de P_1 à P_2 en multipliant par le coefficient multiplicateur 1 + 22/100 = 1,22 :

$$P1 \xrightarrow{\times\,0{,}78} P2.$$

Comment passe-t-on alors logiquement de P2 à P1 ?

→ En divisant par ce même coefficient multiplicateur : $P1 \xleftarrow{\div\,0{,}78} P2$.

Si l'on cherche le coefficient multiplicateur pour passer de P_2 à P_1 (donc pour revenir à l'état initial), on doit alors trouver une multiplication… Or, « diviser par un nombre, c'est multiplier par son inverse », donc

$$P1 \xleftarrow{\div\,0{,}78} P2 \quad\Leftrightarrow\quad P1 \xleftarrow{\times\,\frac{1}{0{,}78}} P2 \quad\Leftrightarrow\quad P1 \xleftarrow{\times\,1{,}28} P2.$$

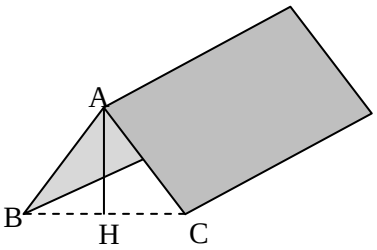
Ce coefficient multiplicateur correspond à une augmentation de 28 % car 1 + 28/100 = 1,28. Il faudrait donc que les performances actuelles des élèves augmentent de 28 % pour retrouver leurs excellentes performances initiales.

		Bilan : 44, 46 p. 28

Chapitre 2 ~ Fonctions (partie 1)

I – Rappels et approfondissements

Exemple-exercice pour tout le paragraphe :



Un élève dispose d'une feuille carrée de 30 cm de côté, pliée en deux. On pose x = AH et on considère que le triangle ABC est isocèle.

Le but du problème est de déterminer pour quelle hauteur x le volume du prisme droit est maximal.

- *À quel intervalle x appartient-il ?*
- *Déterminer AB puis BH, en déduire $\mathcal{A}_{ABC}$ en fonction de x.*
- *Déterminer le volume $f(x)$ du prisme droit en fonction de x.*

Solution :

- Puisque la feuille est pliée en deux, on a AB + AC = 30 et AB = AC, donc AB = 15 cm. On en déduit que AH $\in$ [0 ; 15].
- On a déjà AB = 15 cm. Par Pythagore dans le triangle rectangle ABH, on trouve BH = $\sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$. Enfin, on a :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{2 \times BH \times AH}{2} = BH \times AH = x\sqrt{225 - x^2}\ \text{cm}^2.$$

- Le volume du prisme droit est obtenu en multipliant l'aire de la base ABC par la hauteur du prisme (30 cm car la feuille est carré) : $\mathcal{V} = 3 \times \mathcal{A}_{ABC} = 3x\sqrt{225 - x^2}$ cm^3. On note donc $\boxed{f(x) = 3x\sqrt{225 - x^2}.}$

1. Rappels

Définition

Une fonction est une « machine » qui sert à transformer les nombres.

Exemples : Au collège, les fonctions affines (donc linéaires et constantes aussi) ont été vues. Soit alors $f : x \mapsto 2\pi x$ une fonction affine (même linéaire).
Quelles sont les images de 0 ? 1 ? – 2,3 ? π ? Comment les note-t-on ? Que calcule cette « machine » ??

2. Définitions

Définitions

*** f est la fonction définie par $f(x) = 3x(225 - x^2)$ (on met x dans la machine ; $3x\sqrt{225 - x^2}$ en ressort).**
*** [0 ; 15] est l'ensemble de définition de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre le nombre x. On note $\mathcal{D}_f$ = [0 ; 15].**
*** le nombre $3x\sqrt{225 - x^2}$ est l'image du nombre x par la fonction f.**

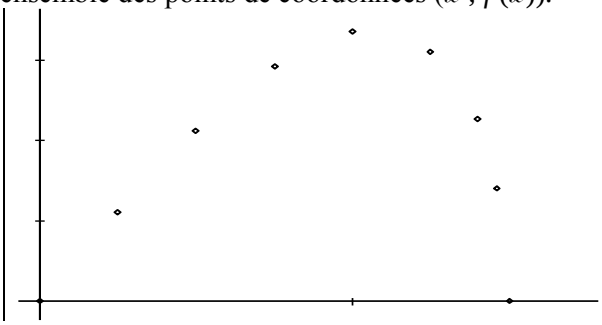
3. Représentation graphique → fiche « Tracer des courbes »

Toute fonction peut se représenter graphiquement sur son intervalle de définition par une courbe, généralement notée $\mathcal{C}_f$, d'équation $y = f(x)$: c'est donc l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$.

Tableau de valeurs ↓ Représentation graphique →

x	0	2,5	5	7,5	10
$f(x)$	0	110,9	212,1	292,3	335,4

x	12,5	14	14,7	15
$f(x)$	310,9	226,2	131,6	0



ATTENTION

NE JAMAIS OUBLIER :
- repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ si possible → voir chapitre 3 pour les « vecteurs » ;
- axes gradués, nommés, orientés ;
- nom ou équation de la courbe : $\mathscr{C}_f$ ou $y = f(x)$ ou $y = 3x\sqrt{225 - x^2}$.

→ Compléter le graphique en conséquence, sans oublier le tracé de la fonction **au crayon**…

Remarques

- Entre 12,5 et 15, on perd plus de 310 unités en ordonnées ! La courbe sera donc imprécise : il faut rajouter des points entre.
- Ce graphique permet de conclure quant à la longueur x nécessaire pour le volume maximal → ≈ 10 cm.

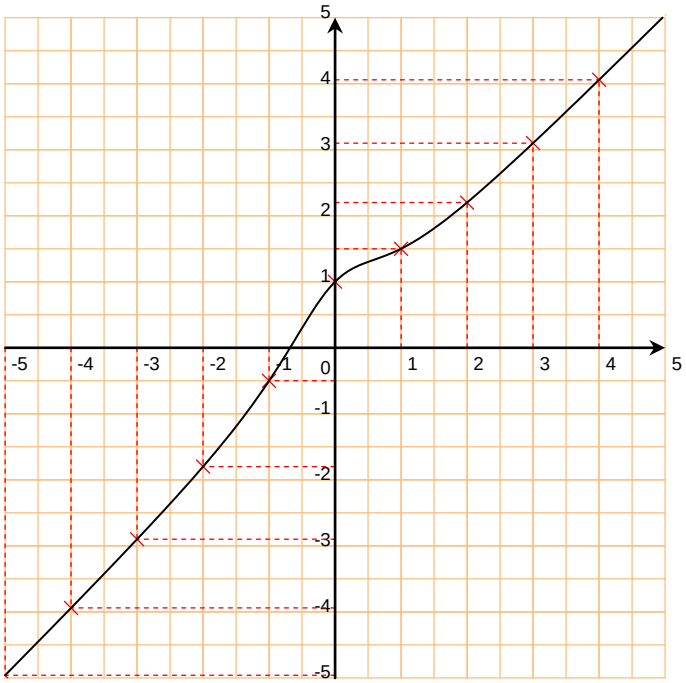
Exercice : Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2+1}$.

→ Voir fichier « 02 - TI et pixels.xls »

Solution :
On commence par construire un tableau de valeurs :

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	– 4,96	– 3,94	– 2,90	– 1,80	– 0,50	1	1,50	2,20	3,10	4,06	5,04

L'intervalle n'étant pas donné, on ne peut pas représenter cette fonction sur tout $\mathbb{R}$, on choisit donc de se restreindre à un intervalle choisi (ne pas oublier de rajouter le repère, c'est le seul élément manquant ici…) :



4. Images et antécédents

Définitions

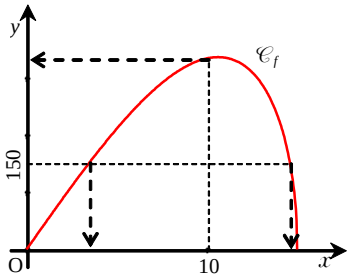
Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$.
- **Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x)$ n'est pas une fonction, mais un nombre appelé image de x par la fonction f. Un nombre possède une unique image par une fonction.**
- **Un antécédent du nombre t par la fonction f est un nombre de $\mathscr{D}_f$ qui admet t pour image. Un nombre peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.**

Remarque

Trouver les antécédents du nombre t par la fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = t$.

Exemple :
Dans notre exemple,
** image :* $f(10) = 3 \times 10 \times \sqrt{225 - 10^2} = 30\sqrt{125} = 150\sqrt{5} \approx 335{,}4$.
** antécédent : on observe graphiquement que le nombre 15 admet deux antécédents* x_1 *et* x_2 *:*

$$x_1 \approx 3{,}4 \text{ et } x_2 \approx 14{,}6.$$



	En classe : 1, 3, 4 p. 88 + 7, 8 p. 89	Exercices : 2 p. 88 + 5, 9, 10 p. 89

5. Détermination de l'ensemble de définition

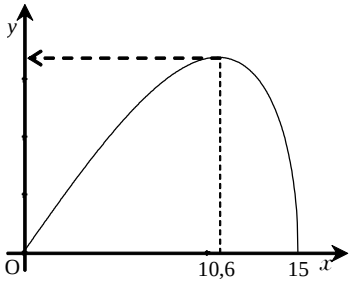
De temps en temps, l'intervalle de définition d'une fonction ne sera pas précisé. Il faudra alors le déterminer manuellement en utilisant nos connaissances. Par exemple,

Exercice : Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$?

Solution :
Les conditions sont : $x + 1 \geqslant 0$ (car ce qui est sous une racine ne peut être strictement négatif) et $x \neq 0$ (car le dénominateur d'une fraction ne peut être nul). On a donc :

$$\begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

D'où $\mathscr{D}_f = [-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$.



II – Variations d'une fonction

Ce paragraphe reprendra encore le graphique de l'exemple précédent :

1. Variations

Définition

Soit f une fonction définie sur son intervalle de définition $\mathscr{D}_f$, et a, $b \in \mathscr{D}_f$. Pour tous x_1, $x_2 \in \mathscr{D}_f$ tels que $x_1 < x_2$, on dit que :
- f est strictement croissante sur [a ; b] si $f(x_1) < f(x_2)$;
- f est strictement décroissante sur [a ; b] si $f(x_1) > f(x_2)$;
- f est croissante sur [a ; b] si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
- f est décroissante sur [a ; b] si $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
- f est constante sur [a ; b] si $f(x_1) = f(x_2)$.

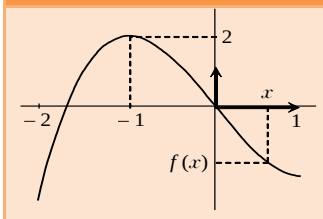
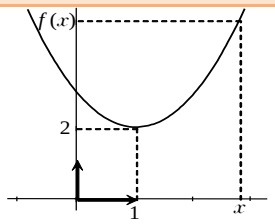
Exemple : *Notre fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 10,6] et strictement décroissante sur l'intervalle [10,6 ; 15].*

Chaque étude de variations débouche systématiquement sur un « **tableau de variations** » :

x	0		10,6		15
f	0	↗	337,5	↘	0

Remarques
* Pour une fonction qui est constante sur un intervalle, on utilise simplement une flèche horizontale : →.
* En gros, f est croissante là où ça « monte » et décroissante là où ça « descend ». Lorsque la courbe n'est pas « plate », on peut ajouter l'adverbe « strictement »…

2. Extrema

COURBE	OBSERVATION DE LA COURBE	TRADUCTION MATHÉMATIQUE	PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION
	Pour $x \in [-2 ; 1]$, la plus grande valeur que prend $f(x)$ est … . Cette valeur est obtenue pour $x = \ldots$	Pour tout x tel que : $-2 < x < 1$, on a : $f(x)$ ..... $f(-1)$.	On dit que la fonction f admet un **maximum de 2 en $x = -1$ sur $[-2 ; 1]$**.
	Pour $x \in [-1 ; 3]$, la plus petite valeur que prend $f(x)$ est … . Cette valeur est obtenue pour $x = \ldots$	Pour tout x tel que :	On dit que la fonction f admet un **minimum de 2 en $x = 1$ sur $[-1 ; 3]$**.

« 02 - EXOS - variations 1.doc » « 02 - EXOS - variations 2.doc » (pour les + rapides)	En classe : 36, 37 p. 94 + 39, 40 p. 95 + 45 p. 96	Exercices : 38, 39, 41, 42 p. 95 + 46 p. 96 + 53, 54 p. 97

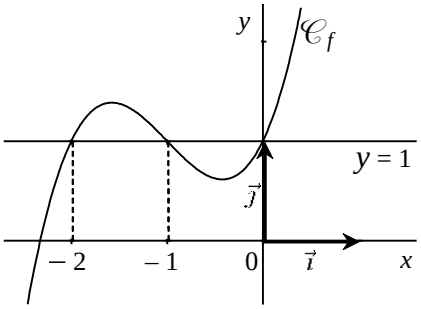
III – Résolutions graphiques (équations, inéquations)

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

1) Résoudre graphiquement $f(x) = 1$.
2) Résoudre graphiquement $f(x) > 1$.

Solution :

Faisons un graphique pour mieux voir les choses…



1) Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = 1$ et de la courbe $\mathscr{C}_f$: $\mathscr{S} = \{-2 ; -1 ; 0\}$.

2) Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = 1$: $\mathscr{S} =]-2 ; -1[\cup]0 ; +\infty[$.

Définition

On dit qu'une fonction f est positive sur $\mathscr{D}_f$ si pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(x) \geqslant 0$.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est positive car $x^2 \geqslant 0$.

« 02 - EXOS - résolution graphique.doc »	En classe : 15 p. 90 + 20 p. 91 + 24 p. 92	Exercices : 16 p. 90 + 21, 22 p. 91 + 25, 28 p. 92

Chapitre 3 ~ Statistiques

I – Rappel du vocabulaire

1. Vocabulaire de base

Définition

En comptant sur le relevé de notes, on peut déterminer le nombre de notes au-dessous de la moyenne pour chaque élève de cette classe pour le 1er trimestre :

1 ; 4 ; 0 ; 3 ; 4 ; 1 ; 4 ; 1 ; 0 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 5 ; 1 ; 0 ; 2 ; 2 ; 3 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2.

- **La population étudiée ici sont les élèves de cette classe (sur qui ?) ;**
- **Le caractère étudié est le nombre de notes au-dessus de 10 au 2nd trimestre (sur quoi ?) ;**
- **L'effectif total est de 24, parce qu'on a compté 24 valeurs en tout (combien ?) ;**
- **Les valeurs du caractère, appelées modalités, sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5.**
- **L'effectif de la valeur 1 est 7 (car 7 élèves ont une note au-dessous de la moyenne). Sa fréquence est égale à 7/24 (effectif valeur ÷ effectif total), soit 0,292 ou encore 29,2 % (× 100).**

Notations : On notera $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p modalités d'une statistique ;
n_i (et f_i) l'effectif (et la fréquence) de la modalité x_i ;
N l'effectif total (donc $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$).

Remarque : La somme des fréquences vaut toujours 1 : $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \cdots + \frac{n_p}{N} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_p}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

On peut représenter plus facilement les données dans un tableau d'effectifs (ou de fréquences, ou même des deux !) :

Nombre de notes au-dessous de la moyenne	0	1	2	3	4	5	Total
Effectif	5	7	5	3	3	1	24
Fréquence	0,21	0,29	0,21	0,13	0,13	0,04	1

2. Les variables

Il existe deux types de variables :
* les **variables qualitatives**, qui prennent des valeurs non numériques (la couleur de la peinture d'un mur, le mode de transport des lycéens, …)
* les **variables quantitatives**, qui prennent des valeurs numériques. On précise alors s'il s'agit d'une variable **discrète** (qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, et **on ordonne les modalités dans l'ordre croissant**) ou **continue** (qui peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle).

Dans la cas d'une variable quantitative, on peut donner une nouvelle définition :

Définitions

L'effectif cumulé croissant d'une modalité x_i est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à x_i. L'effectif cumulé décroissant d'une modalité x_i est la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à x_i.
Cette définition fonctionne aussi en remplaçant « effectif(s) » par « fréquence(s) ».

Exemple : Toujours avec l'exemple précédent,

Nombre de notes au-dessous de la moyenne	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Effectif	*5*	*7*	*5*	*3*	*3*	*1*
Effectifs cumulés croissants	*5*	*12*	*17*	*20*	*23*	*24*
Fréquences cumulées décroissantes	$\frac{24}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{1}{24}$

Remarque

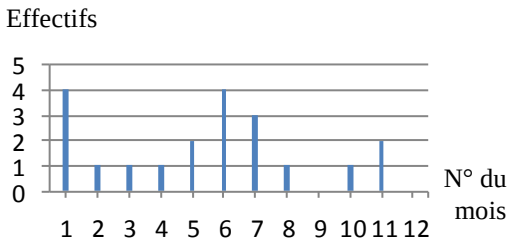
Cette définition sera particulièrement utile pour calculer les quartiles (voir plus loin).

Ne pas faire les questions de représentations	**En classe :** **8 p. 194 + 9, 12 p. 195**	**Exercices :** **10, 13, 14 p. 195**

II – Représentations

1. Diagramme en bâtons (variables quantitatives)

Sur un diagramme en bâtons, on place le caractère étudié (ici un chiffre) sur l'axe des abscisses, et les effectifs sur l'axe des ordonnées :



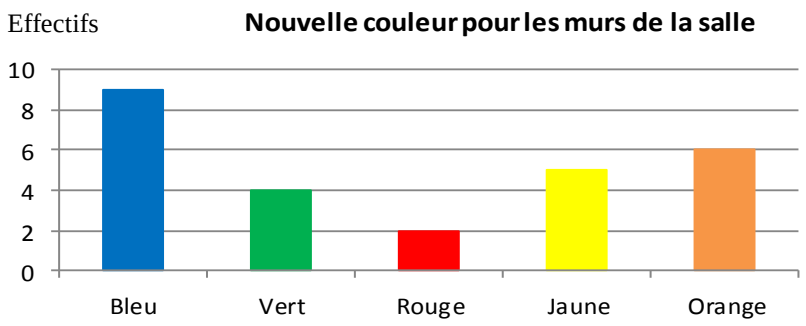
2. Diagramme en tuyau d'orgue (variables qualitatives)

On a demandé aux élèves d'une classe de choisir une nouvelle couleur pour les murs de la salle parmi cinq proposées :

Couleur	Bleu	Vert	Rouge	Jaune	Orange	**Total**
Effectif	9	4	2	5	6	**26**

Quelle est la population étudiée ?
Quel est le caractère étudié ?
Quelles sont les valeurs du caractère ?

Ce diagramme ressemble fortement au diagramme en bâtons :

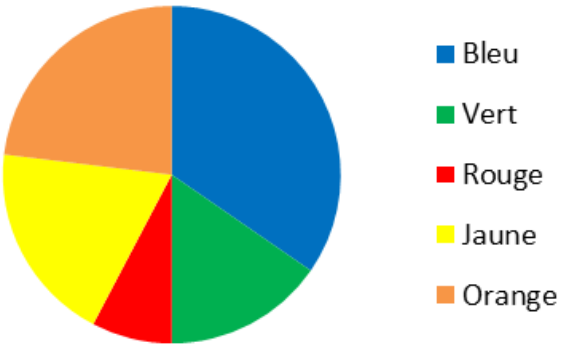


3. Diagramme circulaire (variables qualitatives)

Chaque valeur est représentée par une partie de disque dont l'angle est proportionnel à l'effectif de cette valeur. Il faut utiliser un tableau de proportionnalité pour pouvoir calculer les angles à construire, puisqu'on sait qu'un « camembert » complet fait 360° (tout le tour) :

Couleur	Bleu	Vert	Rouge	Jaune	Orange	TOTAL
Effectif	9	4	2	5	6	26
Angle (en °)	124 °	56 °	28 °	68 °	84 °	360 °

Nouvelle couleur pour les murs de la salle



	En classe : 8 p. 194 + 9 p. 195	Exercices : 10, 11, 13 p. 195

III – Répartition en classes (variables quantitatives continues)

Il a été demandé aux 50 professeurs du collège de donner leurs âges. Voici les résultats (ne correspondant évidemment pas à la réalité…) :

26 – 29 – 30 – 35 – 27 – 49 – 45 – 34 – 25 – 36 – 40 – 53 – 41 – 47 – 45 – 40 – 45 – 33 – 34 – 25 – 37 – 32 – 52 – 31 – 47 – 53 – 26 – 45 – 31 – 53 – 50 – 41 – 30 – 47 – 43 – 51 – 40 – 53 – 35 – 42 – 32 – 35 – 53 – 50 – 47 – 35 – 40 – 50 – 30 – 51.

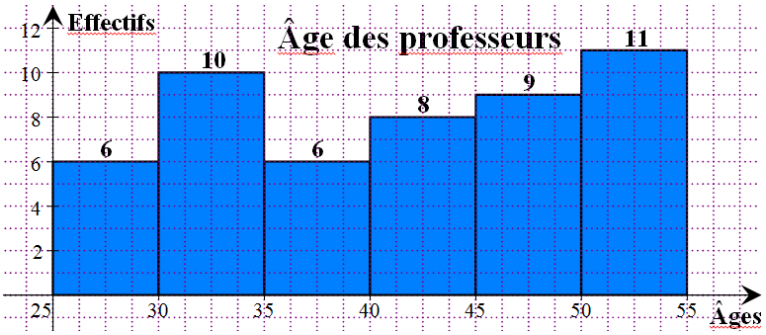
Quelle est la population étudiée ? le caractère ? les modalités ??

Lorsqu'il y a trop de valeurs, les précédents diagrammes ne sont pas simples à réaliser. Dans ce cas, on regroupe les valeurs par **classes** :

Âge	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[
Effectif	6	10	6	8	9	11

1. *Représentation par un histogramme*

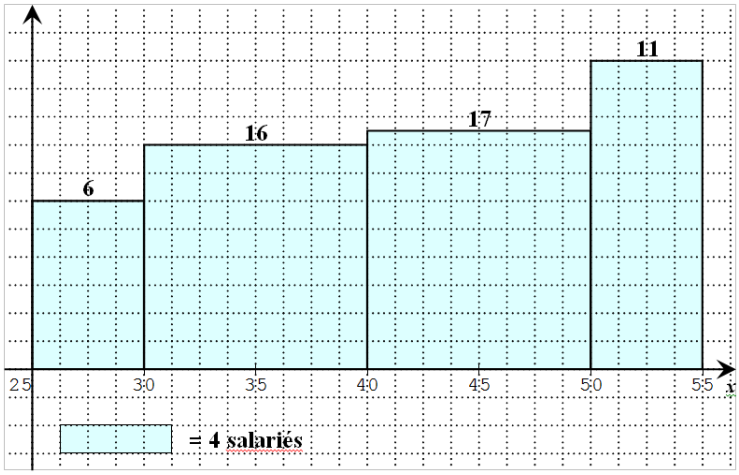
Dans ce type de graphique, chaque classe est représentée par un rectangle. Lorsque toutes les classes ont la même **amplitude** (= le même écart, ici 5 ans), la largeur des rectangles est la même partout et leur longueur est simplement donnée par l'effectif de la classe concernée :



Si les classes n'ont pas la même amplitude, alors c'est l'aire des rectangles qui donnera l'effectif, connaissant une « aire de base ». Par exemple, pour les salaires des profs, on aurait pu avoir

Âge	[25 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 55[
Effectif	6	16	17	11

Le graphique sera alors :



	En classe : 12 p. 195	Exercices : 14 p. 195

2. Représentation par un diagramme circulaire

Chaque classe est représentée par une partie de disque dont l'angle est proportionnel à l'effectif de cette classe. Il faut utiliser le « produit en croix » pour pouvoir calculer les angles à construire :

Âge compris entre…	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	TOTAL
Effectif	6	10	6	8	9	11	50
Angle (en °)	43 °	72 °	43 °	58 °	65 °	79 °	360 °

IV – Paramètres statistiques

1. Les paramètres de position

Définition

On considère une série quantitative discrète dont le tableau d'effectifs est :

Valeurs	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Effectifs	n_1	n_2	$\cdots$	n_p

Alors la moyenne de cette série est le nombre $\overline{X}$ défini par $\overline{X} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}$.

Dans le cas d'une variable quantitative continue, la moyenne s'obtient par le même calcul en remplaçant x_i par le centre de chaque classe.

Remarque

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} x_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} x_2 + \cdots + \frac{n_p}{n_1 + n_2 + \cdots + n_p} x_p$$
$$= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ + f_p x_p.$$

Exemple : Lister l'éloignement du domicile des élèves (en km), puis leur faire calculer la distance moyenne.

Propriétés

Soient P_1 une population d'effectif total N_1 et de moyenne $\bar{X}_1$ et P_2 d'effectif total N_2 et de moyenne $\bar{X}_2$. En réunissant ces deux populations, l'effectif total sera égal à $N_1 + N_2$ et la moyenne totale :

$$\frac{N_1\,\bar{X}_1 + N_2\,\bar{X}_2}{N_1 + N_2}.$$

Exemple : Un contrôle commun de maths a été effectué dans les classes de 1ère du lycée. On compte 163 élèves en général et 35 élèves en technologique. Les premiers ont eu une moyenne de 11,5 tandis que les second ont eu une moyenne de 13,5. Quelle a été la moyenne générale des élèves de 1ère pour ce contrôle ??
→ Il ne faut pas répondre trop vite 12,5 ! En effet, la formlule ci-dessus donne :

$$\frac{163 \times 11{,}5 + 35 \times 13{,}5}{163 + 35} = \frac{1874{,}5 + 472{,}5}{198} = \frac{2347}{198} \approx 11{,}9.$$

Définition

La médiane d'une série de données est un nombre (pas forcément dans la série) qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

Exemple : Pour déterminer une médiane, il faut d'abord ranger toutes les valeurs dans l'ordre croissant, puis séparer les cas où l'effectif total est pair et où il est impair.

Effectif total impair

Exemple : $\underbrace{7 - 7 - 8}_{3\text{ valeurs}} - \underset{\text{médiane}}{\boxed{9}} - \underbrace{12 - 12{,}5 - 15}_{3\text{ valeurs}}.$

La médiane de cette série est 9.
En effet, il y a autant de valeurs au-dessus qu'en-dessous.

Effectif total pair

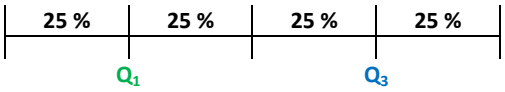
Exemple : $\underbrace{7 - 7 - 8 - 9}_{4\text{ valeurs}} \underset{\text{médiane}}{\boxed{-}} \underbrace{12 - 12{,}5 - 15 - 16}_{4\text{ valeurs}}.$

La médiane est alors la demi-somme de 9 et 12 : $\frac{9 + 12}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5$. *La médiane vaut 10,5.*

Définition

Les quartiles d'une série de données rangées dans l'ordre croissant sont des nombres qui partagent cette série en quatre groupes qui ont un effectif à peu près égal. Les quartiles font partie des données de la série.

Le premier quartile est noté Q_1, le troisième Q_3. Le second quartile est la médiane !



L'intervalle interquartile est l'intervalle [Q_1 ; Q_3] : il contient 50 % de l'effectif.

Pour déterminer les quartiles, on compte l'effectif total, noté N, puis :
- on prend le premier nombre entier supérieur ou égal N/4 → donne le rang du **premier quartile** ;
- on prend le premier nombre entier supérieur ou égal 3N/4 → donne le rang du **troisième quartile**.

Exemples :

- ***Cas n° 1 (N est divisible par 4, par exemple N = 20)*** *: Alors :* $\frac{N}{4} = \frac{20}{4} = 5$ *et* $3 \times \frac{N}{4} = 3 \times \frac{20}{4} = 15$.

  Q_1 est donc la 5ème valeur de la série et Q_3 est la 15ème valeur de la série.

- ***Cas n° 2 (N n'est pas divisible par 4, par exemple N = 27)*** *: Alors :* $\frac{N}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75$ *e* $3 \times \frac{N}{4} = 20{,}25$.

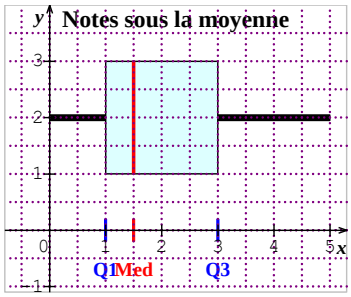
  Q_1 est donc la 7ème valeur de la série et Q_3 est la 21ème valeur de la série.

Remarques

- La médiane n'est pas forcément une valeur de la série (notamment quand l'effectif est pair).
- Les quartiles sont toujours des valeurs de la série.
- Pour une analyse plus fine, il existe aussi les déciles qui divisent la série statistique en 10 sous-ensembles. La médiane est alors le cinquième décile.

Exercice : Déterminer, pour la série statistiques des notes (toute première définition) son effectif total, sa moyenne, sa médiane, puis ses quartiles.

Représentation graphique : Si l'effectif est trop important, on se contente de représenter les données par leurs valeurs remarquables : il s'agit de la **boîte à moustache**.



En classe : 33, 36, 37 p. 199	Exercices : 34, 35, 38, 39, 40 p. 199

2. Les paramètres de dispersion

Définition

L'étendue d'une série est la différence entre ses valeurs extrêmes.

L'écart-type d'une série de moyenne $\overline{X}$ est le réel noté σ(X) tel que :

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{n_1(x_1 - \overline{X})^2 + n_2(x_2 - \overline{X})^2 + \cdots + n_p(x_p - \overline{X})^2}}{N}.$$

Remarques

- Plus l'écart-type est petit, plus la série est concentrée autour de sa moyenne.
- L'écart-type est toujours un nombre positif. Il n'est nul que si toutes les valeurs sont égales à la moyenne.

	En classe : 15, 18, 21 p. 196	Exercices : 16, 17, 19, 20 p. 196

IV – Fréquences conditionnelles

Il faut souvent étudier plusieurs variables simultanément. On construit alors un tableau d'effectifs croisés pour faire apparaître l'une des séries en lignes et l'autre en colonnes :

	Secondes	Premières	Terminales	Total
Demi-pensionnaires	228	182	155	565
Externes	22	16	25	63
Total	250	198	180	628

Exercice : Effectuer les calculs demandés :

1. Quelle est la fréquence de demi-pensionnaires dans le lycée ?
2. Quelle est la fréquence d'externes dans le lycée ?
3. Quelle est la fréquence de demi-pensionnaires parmi les premières ?
4. Quelle est la fréquence de premières parmi les demi-pensionnaires ?

Les deux dernières fréquences calculées sont des **fréquences conditionnelles**. On les note (par exemple) $f_P(D)$ pour la question 3 et $f_D(P)$ pour la 4. L'indice se lit « parmi… ».

	En classe : 43 p. 200	Exercices : 44, 45 p. 200

Chapitre 4 ~ Équations & inéquations

Commencer par étudier la fiche « 04 - COMPLÉMENT - Implication & équivalence.doc »…

I – Résolution d'une équation

1. Rappels

Propriétés

Soient X, Y et Z trois réels quelconques. Alors

1. **$X = Y \Leftrightarrow X + Z = Y + Z$; (illustration avec la balance)**
2. **$X = Y \Leftrightarrow X - Z = Y - Z$; (illustration avec la balance)**
3. **$X = Y \Leftrightarrow XZ = YZ$, à condition que $Z \neq 0$;**
4. **$X = Y \Leftrightarrow \frac{X}{Z} = \frac{Y}{Z}$, à condition que $Z \neq 0$;**
5. **$XY = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ou $Y = 0$.**

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $3x^2 = 9x$.

Solution et rédaction :

Méthode fausse

(E) $\Leftrightarrow 3x = 9$
(E) $\Leftrightarrow x = 3$
$\mathcal{S} = \{3\}$.

← Équivalence fausse :
on a divisé les deux membres de l'équation par x qui peut être nul (la condition 4 ci-dessus n'est donc pas vérifiée !!!)

Méthode juste

(E) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = 0$
(E) $\Leftrightarrow 3x(x - 3) = 0$
(E) $\Leftrightarrow 3x = 0$ ou $x - 3 = 0$
(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$
$\mathcal{S} = \{0 ; 3\}$.

2. Valeurs interdites

Avant de résoudre une équation, il faut éliminer les « valeurs interdites » qui pourraient annuler un dénominateur ou rendre ce qui est sous une racine négatif…

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{3x^2}{x+1} = \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$.

Solution et rédaction :

Conditions : $x + 1 \neq 0$ et $(3x - 2)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq \frac{2}{3}$

Résolution :

(E) $\Leftrightarrow \frac{3x^2}{x+1} = \frac{6x^2 - 4x}{(3x-2)(x+1)}$

(E) $\Leftrightarrow \frac{3x^2}{x+1} = \frac{2x\,\cancel{(3x-2)}}{\cancel{(3x-2)}(x+1)}$ (factorisation de $6x^2 - 4x$ par $4x$ qui est un facteur commun)

(E) $\Leftrightarrow \frac{3x^2}{x+1} - \frac{2x}{x+1} = 0$ (propriété 2)

(E) $\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x}{x+1} = 0$ (règle de calcul pour deux fractions ayant même dénominateur)

(E) $\Leftrightarrow \frac{x(3x-2)}{x+1} = 0$ (factorisation de $3x^2 - 2x$ par x qui est un facteur commun)

(E) $\Leftrightarrow x(3x - 2) = 0$ (on utilise la propriété 4 : en effet, les conditions nous assurent que $x + 1 \neq 0$)

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $3x - 2 = 0$ (on aboutit à une équation-produit qui nous amène à utiliser la propriété 5)

(E) $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$ (on n'oublie pas les valeurs interdites → 2/3 n'est PAS solution !)

Conclusion : $\mathcal{S} = \{0\}$.

Remarque : Du point de vue de la rédaction, toujours penser aux équivalences !

	En classe : 1, 3, 7, 8 p. 43 + 27 p. 44	Exercices : 2, 4, 5, 6, 10 p. 43 + 28 p. 45

3. Méthode de résolution

Globalement, il existe plusieurs méthodes de résolution d'une équation. Il faut toujours se baser sur l'équation donnée :

- s'il y a des parenthèses, il y a de grandes chances pour qu'il faille les développer ;
- si ça n'aboutit pas, il faut peut-être chercher à factoriser (de manière directe ou en passant par une identité remarquable) afin d'aboutir à une équation-produit ;
- …

De temps en temps, surtout pour des équations de degré 2 (contenant un terme en x^2), il va falloir ruser…

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 + x - 3 = 0$.

Solution :
Notons déjà qu'il n'y a pas de condition particulière, et pas de parenthèses, et la méthode classique qui consiste à mettre tous les « x » d'un côté et les nombres de l'autre ne peut aboutir. On va quand même factoriser astucieusement en utilisant une identité remarquable :

(E) $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

(E) $\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 0$ (on fait apparaître une parenthèse où x^2 n'a pas de coefficient)

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{3}{2}\right] = 0$ (on utilise l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$)

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = 0$

(E) $\Leftrightarrow 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] = 0$ (on a reconnu l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$)

(E) $\Leftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) = 0$

(E) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{6}{4}\right)\left(x - \frac{4}{4}\right) = 0$ (propriété 4)

(E) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1) = 0$ (on a une équation-produit)

(E) $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ ou $x = 1$.

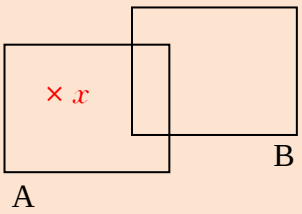
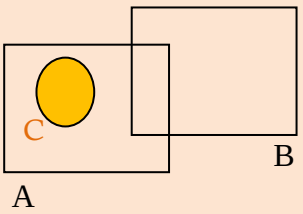
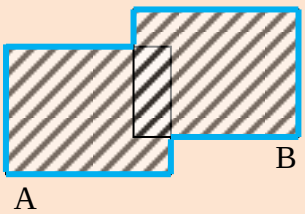
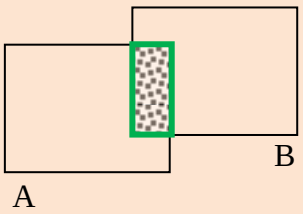
Finalement, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} ; 1\right\}$

Cette méthode est certes longue, mais elle nous permettra de savoir résoudre à peu près toutes les équations. En particulier, pour les équations de degré 2 comme celle-là, une méthode plus rapide sera vue l'année prochaine pour ceux qui iront en S.

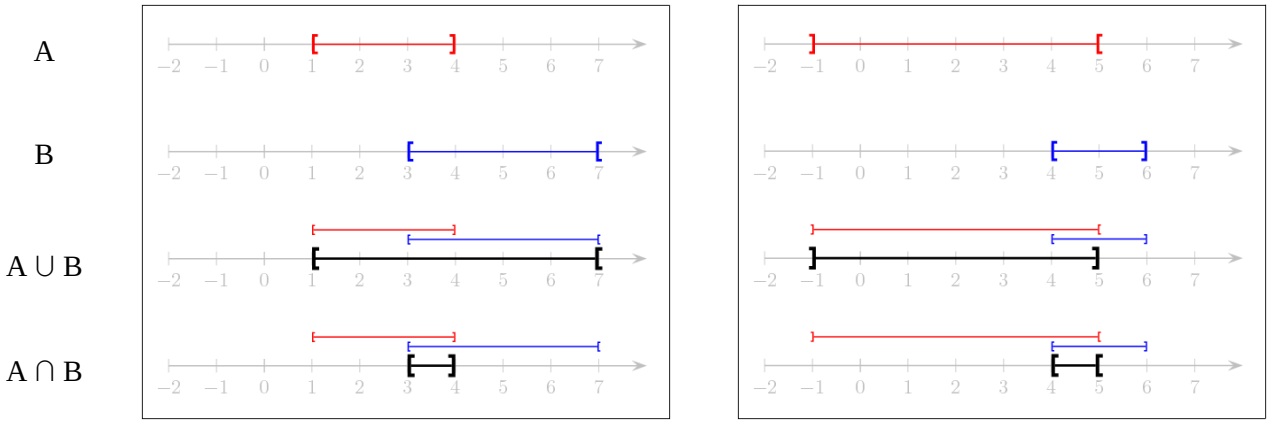
	En classe : 12, 14, 19, 22 p. 44 Problèmes : 32, 33 p. 45	Exercices : 11 p. 43 + 13, 18, 23 p. 44 Problèmes : 31, 34, 35 p. 45

II – Intervalles de $\mathbb{R}$ pour la réunion et l'intersection

Soient A et B deux ensembles quelconques. Voici quelques notations à connaître :

∈ (appartenance)	⊂ (inclusion)	∪ (réunion)	∩ (intersection)
			
On choisit un élément d'un ensemble : $x \in A$.	On choisit un sous-ensemble d'un ensemble : $C \subset A$.	L'ensemble des éléments se trouvant dans A ***OU*** dans B : $A \cup B$.	L'ensemble des éléments se trouvant à la fois dans A ***ET*** dans B : $A \cap B$.

L'intersection et la réunion s'appliquent très bien aux intervalles de $\mathbb{R}$. Voici quatre exemples assez parlants :



	En classe : 38, 40 p. 45	Exercices : 39, 41, 42 p. 45

III – Résolution d'une inéquation

1. Rappels

Propriétés

Soient X, Y et Z trois réels quelconques. Alors

1. **X > Y ⇔ X + Z > Y + Z ; (illustration avec la balance)**
2. **X > Y ⇔ X – Z > Y – Z ; (illustration avec la balance)**
3. **Si Z > 0, alors X > Y ⇔ XZ > YZ,**
   Si Z < 0, alors X > Y ⇔ XZ < YZ ;
4. **Si Z > 0, alors X < Y ⇔ $\frac{X}{Z} < \frac{Y}{Z}$,**
   Si Z < 0, alors X < Y ⇔ $\frac{X}{Z} > \frac{Y}{Z}$.

Toutes ces propriétés sont aussi valables en changeant les inégalités strictes par des larges, et en changeant le sens de toutes les inégalités.

2. Tableau de signe (expression du premier degré)

En étudiant le signe d'une expression du premier degré, par exemple $-3x + 4$, on détermine que :

- $-3x + 4 < 0 \Leftrightarrow -3x < -4 \Leftrightarrow x > \frac{-4}{-3}$ (le signe change car $-3 < 0$!) $\Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$;
- $-3x + 4 > 0 \Leftrightarrow -3x > -4 \Leftrightarrow x < \frac{-4}{-3}$ (le signe change encore, toujours parce que $-3 < 0$!) $\Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$.

Cette écriture n'est pas très commode, on introduit alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+4$		$+$	0	$-$	

De manière plus générale,

Propriété

Soit $ax + b$ une expression du premier degré, avec $a \neq 0$.

Si $a > 0$, alors le signe de $ax + b$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$, alors le signe de $ax + b$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Exercice : Déterminer le signe de l'expression $5x - 7$.

Solution :
Dans la pratique, on cherche quand ça s'annule, puis on utilise la propriété ci-dessus : $5x - 7 = 0 \Leftrightarrow 5x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$. Puisque le coefficient de x est positif, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{7}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x-7$		$-$	0	$+$	

	En classe : 43, 44, 52 p. 46	Exercices : 38, 39 p. 45 (intervalles de ℝ) + 45, 54 p. 46

3. Tableau de signe (d'un produit ou d'un quotient)

Pour déterminer le signe d'un produit (resp. d'un quotient), on détermine le signe de chaque facteur (resp. du numérateur et du dénominateur), puis on applique la règle des signes. Les deux peuvent se faire simultanément.

Exercice : Résoudre dans ℝ l'équation (I) $\frac{4(x+1)}{x+3} \geqslant x + 1$.

Solution :
On n'oublie pas les conditions : il faut que $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. On va faire apparaître des produits et quotients dont on pourra déterminer les signes (c'est-à-dire qu'on pourra comparer à 0) :

(I) $\Leftrightarrow \frac{4(x+1) - (x+1)(x+3)}{x+3} \geqslant 0$

(I) $\Leftrightarrow \frac{(x+1)(4-x-3)}{x+3} \geqslant 0$

(I) $\Leftrightarrow \frac{(1+x)(1-x)}{x+3} \geqslant 0$

Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes puis donner la conclusion : →

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe du quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

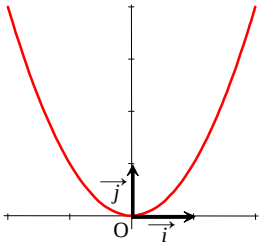
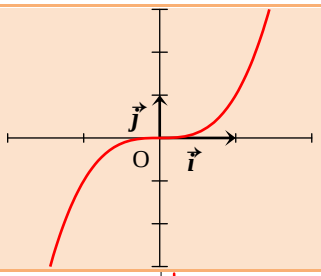
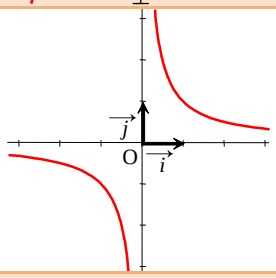
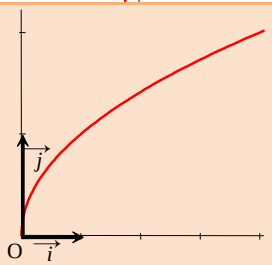
Pourquoi y a-t-il une double-barre et pas un 0 ??? Expliquer à ce moment-là pourquoi et où on met des doubles-barres…

Conclusion : $\mathscr{S} =]-\infty ; 3[\cup [-1 ; 1]$.

« 04 - EXOS - équations, inéquations.doc »	En classe : 56, 58, 60, 62 p. 47	Exercices : 57, 59, 61, 63(, 64) p. 47

Chapitre 5 ~ Fonctions (partie 2)

Fonctions de référence

Fonction	$x \mapsto$?	Remarques	Variations	Représentation graphique
linéaire	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto ax + b$ *a = coefficient directeur* *b = ordonnée à l'origine*	Pour tous nombres x et y, on a : $f(y) - f(x) = a(y - x)$	• si $a < 0$, • si $a > 0$,	
carré	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2$	Pour tout réel x, on a : $x^2 \geqslant 0$. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées traduit que pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.	x : $-\infty$ … $+\infty$ $x \mapsto x^2$	
cube	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^3$	La symétrie par rapport à O traduit que pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.	x : $-\infty$ … $+\infty$ $x \mapsto x^3$	
inverse	$\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$	La double barre dans le tableau indique que la fonction n'est pas définie en 0.	x : $-\infty$ … $+\infty$ $x \mapsto \frac{1}{x}$	
racine carrée	$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \sqrt{x}$	L'écriture $\sqrt{x}$ implique $x \geqslant 0$. Pour tous réels x et y positifs, on a : $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.	x : 0 … $+\infty$ $x \mapsto \sqrt{x}$	

	En classe :	Exercices :
	général : 1 p. 113 **linéaires : 4, 6 p. 113** **carré : 11, 13, 21 p. 114** **cube : 26, 27, 29 p. 117** **inverse : 31, 32, 36 p. 117** **racine carrée : 40, 41 p. 120**	**général : 2 p. 113** **linéaires : 3, 5, 7, 8, 9 p. 113** **carré : 12, 14, 16, 18 p. 114** **cube : 25, 28 p. 117** **inverse : 30, 33 p. 117** **racine carrée : 39, 42, 44 p. 120**

Chapitre 6 ~ Suites numériques

I – Définitions

Définition

On appelle suite numérique toute fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.

Une suite se note généralement u ou v : la définition donne alors

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n. \end{array}$$

On note la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n \in I}$ (avec $I \subset \mathbb{N}$), ou encore simplement (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté. Généralement, le premier terme est u_0, mais il arrivera que ce soit plutôt u_1 ou encore un autre indice !

Définition

u_n est le terme général de la suite définie ci-dessus, et n est appelé son indice.

1. Détermination d'une suite

Une suite peut être déterminée de trois manières différentes :
* par la donnée de termes successifs ;
* grâce à une forme fonctionnelle ;
* sous forme récurrente (pour calculer un terme, il faut alors calculer tous les termes précédents).

Exemples :
* *On considère la suite des nombres impairs :* $\{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; \ldots\}$.
* *On considère la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par son terme général* $u_n = 1 + 2n$.
* *On considère la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définie par récurrence par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2. \end{cases}$

Qu'y a-t-il de commun entre ces trois exemples ? → ils désignent tous les trois la même suite !!

Exercice : À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, calculer les 10 premiers termes des trois suites suivantes :

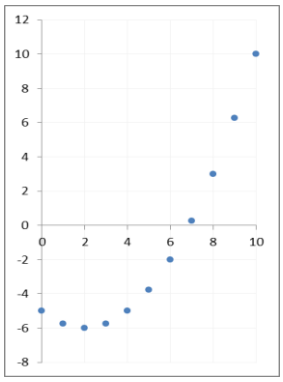
$$u_n = \frac{1}{4}n^2 - n - 5 \quad ; \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = -\frac{5}{2}u_n + 2. \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	n		1ère suite		2ème suite		3ème suite
2							
3	0	u_0	-5		1		—
4	1	u_1	-5,75		5,5		0
5	2	u_2	-6		12,25		2
6	3	u_3	-5,75		22,375		-3
7	4	u_4	-5		37,5625		9,5
8	5	u_5	-3,75		60,34375		-21,75
9	6	u_6	-2		94,515625		56,375
10	7	u_7	0,25		145,7734375		-138,9375
11	8	u_8	3		222,6601563		349,34375
12	9	u_9	6,25		337,9902344		-871,359375
13	10	u_{10}	10		510,9853516		2180,398438
14	11	u_{11}	—		—		-5448,996094
15							

Révisions puissances :	En classe :	Exercices :
1, 2, 3 p.161	5, 7, 8 p. 161	4, 6, 9 p.161

2. Représentation graphique d'une suite

Une suite est représentée dans un repère par l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.



Voici ce que ça donne pour la première suite de l'exercice ci-dessus :

	En classe : **Représenter les suites du 5 p. 161 entre 0 et 5.**	

II – Sens de variation

Définitions

- **Une suite (u_n) est dite <u>croissante</u> si pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.**
- **Une suite (u_n) est dite <u>décroissante</u> si pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.**
- **Une suite (u_n) est dite <u>constante</u> si pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = 0$.**

Exemples : * Que dire des variations de la deuxième suite de l'exercice ci-dessus ?

* Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n + 4$. Pour tout réel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 3(n + 1) + 4 - (3n + 4) = 3n + 3 + 4 - 3n - 4 = 3.$$

Nécessairement, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice : Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 5$.

<u>Solution</u> :
Pour tout réel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - (n + 1) - 5 - (n^2 - n - 5) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 5 - n^2 + n + 5 = 2n.$$

Puisque $n \geqslant 0$, on a $2n \geqslant 0$, et par suite $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

	En classe : **10, 11 p. 161 + 12, 14 p. 162**	**Exercices :** **13, 15, 16, 17, 18 p. 162**

III – Suites arithmétiques

Définitions

Une suite (u_n) est appelée <u>suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r</u> si pour tout entier naturel, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemples : Il existe plusieurs manières de définir une suite arithmétique :

1. *La suite des nombres impairs est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2 ;*
2. *La suite de terme général $u_n = 3n + 4$ (rencontrée ci-dessus) est la suite arithmétique de premier terme 4 et de raison 3.*
3. *La suite définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4.*

Remarque

Une telle suite est définie de manière unique par son premier terme et sa raison. Pour passer d'un terme à un suivant, on ajoute toujours le même nombre : la raison r.

Propriété (admise)

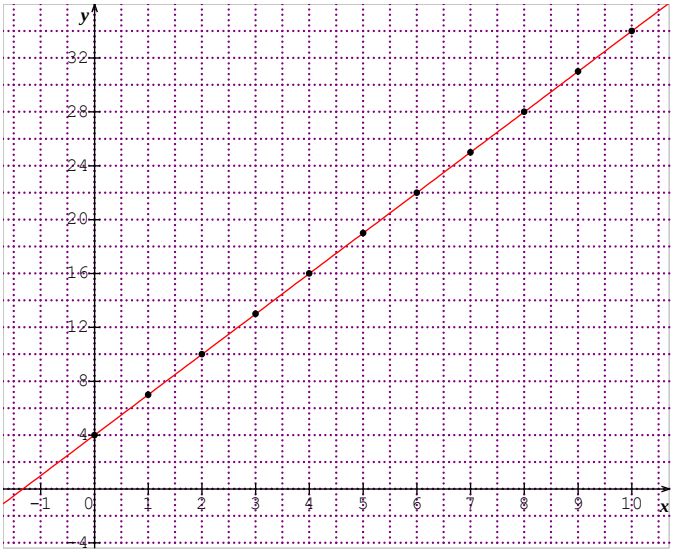
Une suite est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si $u_n = u_0 + nr$ pour tout entier naturel n.

Exemple : On a déjà vu que la suite de terme général $u_n = 3n + 4$ n'était autre que la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 3$. Vérifions sur un tableur que ces deux suites sont bien les mêmes :

	A	B	C
1	n	$u_n = 3n + 4$	$u_{n+1} = u_n + 3$
2	0	4	4
3	1	7	7
4	2	10	10
5	3	13	13
6	4	16	16
7	5	19	19
8	6	22	22
9	7	25	25
10	8	28	28
11	9	31	31
12	10	34	34

Puisque $u_{n+1} = u_n + r$, il y a trois cas à distinguer pour le sens des variations :
- si $r < 0$, alors la suite est décroissante,
- si $r > 0$, alors la suite est croissante,
- si $r = 0$, alors la suite est constante.

Dans tous les cas, la représentation graphique d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est formée de points qui se trouvent tous sur la droite d'équation $y = u_0 + rx$:avec la suite de l'exemple ci-dessus, on obtient



	En classe : 19, 21 p. 162 + 23, 26, 27, 29, 30 p. 163	Exercices : 20, 22 p. 162 + 24, 25, 28, 31 p. 163

IV – Suites géométriques

Définitions

Une suite (u_n) est appelée suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q si pour tout entier naturel, on a : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Exemples : Il existe plusieurs manières de définir une suite géométrique :

1. *Les diverses RAM qui existent ont toutes des capacités em Mo qui sont des multiples de 2 : ils appartiennent tous à la suite géométrie de premier terme 1 et de raison 2 ;*
2. *La suite de terme général $u_n = 5 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ est la suite arithmétique de premier terme 5 et de raison 3/2.*

3. *La suite définie par récurrence par* $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2} u_n \end{cases}$ *est la même suite que l'exemple précédent, mais écrite sous forme récurrente.*

Remarque

* On se limitera au cas où $u_0 > 0$ et $q > 0$.
* Une telle suite est définie de manière unique par son premier terme et sa raison. Pour passer d'un terme à un suivant, on multiplie toujours par le même nombre : la raison q.

Propriété (admise)

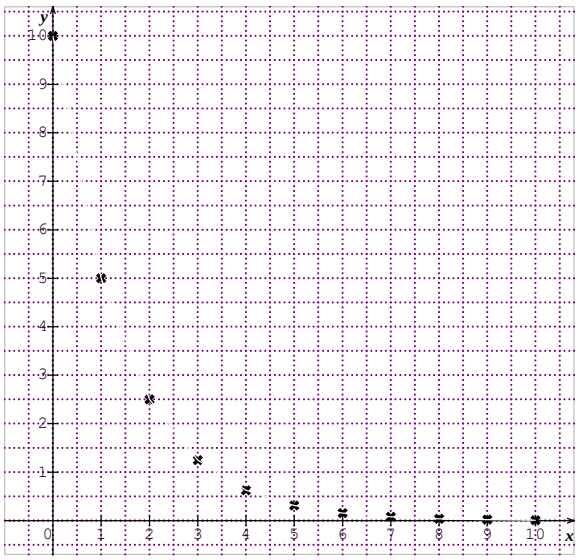
Une suite est géométrique de premier terme u_0 et de raison q si et seulement si $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout entier naturel n.

Exemple : Vérifier sur un tableur que les deux expressions d'une suite géométrique (celle donnée par la définition, et cette donnée par cette propriété) conduisent aux mêmes termes…

Puisque $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n-1} - u_0 \times b^n = \overbrace{u_0}^{>0} \times \overbrace{q^n}^{>0} \times (q-1)$, il y a trois cas à distinguer pour le sens des variations :
- si $0 < q < 1$, alors la suite est décroissante,
- si $q > 1$, alors la suite est croissante,
- si $q = 1$, alors la suite est constante.

Exercice : Construire un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en utilisant 1 cm comme unité de longueur sur les deux axes, puis représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite géométrique un = $10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Solution :



	En classe : 34, 36 p. 163 + 38, 40, 44 p. 164 Applications : 56 p. 165 + 64 p. 167	Exercices : 35, 37 p. 163 + 39, 41, 42, 43, 49 p. 164 Applications : 57, 58 p. 165

Chapitre 7 ~ Systèmes d'équations

I – Lien entre système d'équations et droites

1. Définition

Définition

Soient *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et *f* six nombres relatifs quelconques. On appelle système de deux équations de degré 1 et d'inconnues x et y les deux équations liées $ax + by = c$ et $dx + ey = f$. On note ce système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Résoudre un système de deux d'équations à deux inconnues revient à trouver tous les couples de nombres (x ; y) tels qu'ils vérifient simultanément les deux équations. Chacun de ces couples est alors appelé solution du système.

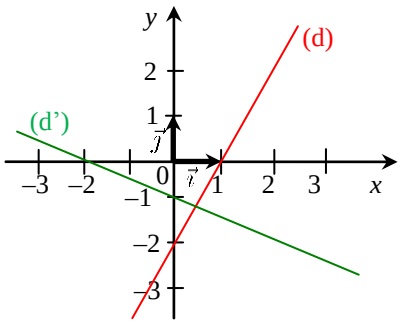
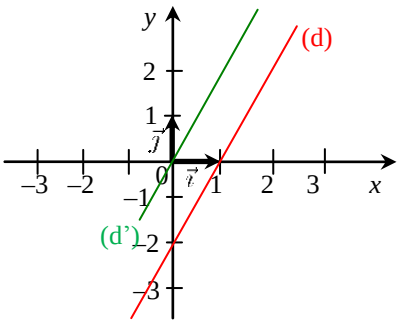
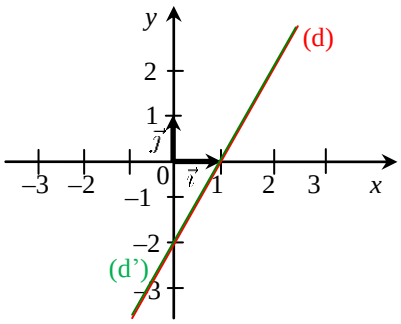
Remarques

- Chacune des deux équations est une équation de degré 1 à deux mêmes inconnues : x et y ; ces équations sont donc liées !
- Lorsqu'on aura trouvé la solution, l'ordre des solutions est important : x d'abord, y ensuite…
- On est sûr qu'un système possède une unique solution lorsque son **déterminant** $ae - bd$ est non nul.

2. Droites et systèmes

Puisque $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, et que $dx + ey = f \Leftrightarrow y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e}$, un système d'équations est en fait constitué de deux équations de droites. Notons-les respectivement (d) et (d'). Rechercher la solution d'un système d'équations revient donc exactement à étudier l'intersection des deux droites associées !

Le système $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ admet…

…1 unique solution	…0 solution	…une infinité de solutions
Le couple (x ; y) vérifiant le système donne les coordonnées du point d'intersection : 	Les deux droites (d) et (d') ne se touchent pas, elles sont alors parallèles : 	Les droites (d) et (d') se coupent une infinité de fois. Seule possibilité : elles sont confondues : 

Exemples :

$$\begin{cases} x + 2y = -2 & L_1 \\ -2x + y = -2 & L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 & L_1 \\ 5y = -6 & L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -2 \\ y = -1{,}2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}4 \\ y = -1{,}2. \end{cases}$$

Les droites $y = -\frac{1}{2}x - 1$ et $y = 2x - 2$ se coupent au point P(0,4 ; – 1,2).

$$\begin{cases} 4x - 2y = 0 & L_1 \\ -2x + y = -2 & L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 & L_1 \\ 0 = -1 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

Puisque la seconde équation est impossible, ce système n'admet pas de solution.

Les droites $y = 2x$ et $y = 2x - 2$ sont effectivement parallèles (même coefficient directeur).

$$\begin{cases} 4x - 2y = 4 & L_1 \\ -2x + y = -2 & L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 4 & L_1 \\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2 \end{cases}$$

Puisque la seconde équation est toujours vérifiée, ce système admet une infinité de solutions : tout couple $(x ; y)$ vérifiant $4x - 2y = 4$.

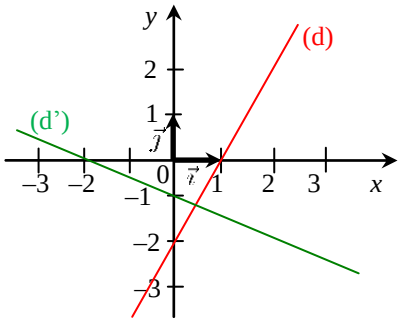
Ces équations traduisent la même équation de droite : $y = 2x - 2$. Elles sont donc bien confondues.

	En classe : **Droites : 2, 4, 7, 11 p. 62**	**Exercices :** **Droites : 1, 3, 5, 8, 9, 12, 13 p. 62**

II – Méthodes de résolution

1. Méthode graphique

On trace simplement les deux droites représentées par les deux équations du système, et on lit sur le graphique les coordonnées du point d'intersection :



Les deux droites sont $y =$ $x -$ et $y =$ $x -$. Le point d'intersection a pour coordonnées :

Faire une activité de résolution sur la calculatrice !!!	**En classe :** **17, 26 p. 63**	**Exercices :** **15, 16, 27 p. 63**

2. Méthode par combinaison (ou addition)

On considère le système d'équations suivant : $\begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ -2x - y = 0. & L_2 \end{cases}$

On constate que $2 \times L_1$ donne $2x + 4y = 6$, donc $2L_1 + L_2$ donne :

$$\begin{array}{rl} & 2x + 4y = 6 \\ + & -2x - y = 0 \\ \hline & 0x + 3y = 6 \end{array}$$

On résout cette équation pour trouver y : $3y = 6$ donne directement $y = 2$.

On remplace cette valeur dans l'une des deux équations au choix pour trouver x : $x = 3 - 2y = 3 - 4 = -1$.

La solution du système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$ est donc le couple (– 1 ; 2).

	En classe : **19 p. 63**	**Exercices :** **28 p. 63**

3. Méthode par substitution

On considère toujours le système suivant : $\begin{cases} x + 2y = 3 & L_1 \\ -2x - y = 0. & L_2 \end{cases}$

On exprime x en fonction de y dans la première équation

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

On substitue (= remplace) x dans la seconde équation par l'expression trouvée

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -2(3 - 2y) - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ -6 + 4y - y = 0 \end{cases}$$

On résout la seconde équation

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2 \times 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

On remplace y par sa valeur dans la première équation

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La solution du système $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$ est donc le couple $(-1 ; 2)$.

	En classe : **20 p. 63 + 29, 30 p. 64 + 34 p. 64**	**Exercices :** **18 p. 63 + 31, 32, 33 p. 64**

Chapitre 8 ~ Tangente & nombre dérivé

Nous connaissons déjà la tangente à un cercle : il s'agit d'une droite qui ne touche le cercle qu'en un seul point. Autrement dit, cette droite « frôle » le cercle. Nous allons étendre cette connaissance aux courbes susceptibles d'être tracées !

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, m est un réel appartenant à I ($m \in$ I) et $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère au moins orthogonal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On note encore M le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse m : l'ordonnée de M est donc $f(m)$.

I – Tangente et coefficient directeur

Définition

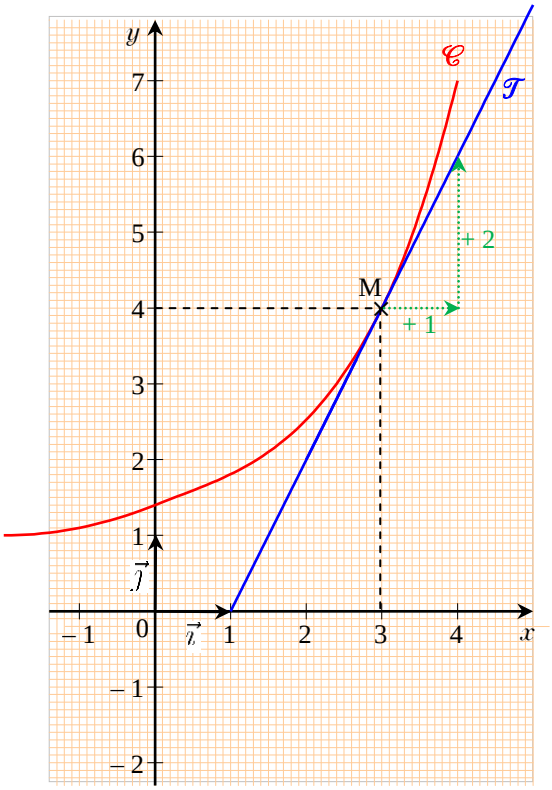
On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente (non parallèle à l'axe des ordonnées) au point M(m ; $f(m)$). On appelle nombre dérivé de f en m le nombre égal au coefficient directeur de cette tangente et on le note $f'(m)$. Par conséquent, la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en M admet une équation de la forme $y = f'(m)x + p$, où le nombre p reste à déterminer.

Exemple : La fonction f définie ci-contre admet une tangente au point M d'abscisse 3. On détermine graphiquement que cette tangente admet pour coefficient directeur 2 : son équation est donc de la forme $y = 2x + p$.

En remplaçant x et y par les coordonnées du point M (puisque la droite y passe !), on trouvera le nombre p manquant : $4 = 2 \times 3 + p$

$\Leftrightarrow 4 = 6 + p$
$\Leftrightarrow 4 - 6 = p$
$\Leftrightarrow p = -2$.

Finalement, l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ en M est donnée par l'équation de droite $y = 2x - 2$. Reste à prolonger la droite bleue pour bien s'apercevoir qu'elle coupe l'axe des ordonnées au nombre $p = -2$.



En poussant le raisonnement dans le cas général, on trouve que l'équation générale d'une tangente à un point M(m ; $f(m)$) est donnée par la formule :

$$\boxed{y = f'(m)(x - m) + f(m)}.$$

Rappeler la lecture graphique d'une équation de droite	En classe : 1, 3, 4 p. 136	Exercices : 2, 5 p. 136

Définition

On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente $\mathscr{T}$ (non parallèle à l'axe des ordonnées) au point M(m ; $f(m)$), donc d'équation $y = f'(m)x + p$. On appelle alors meilleure approximation affine de f au voisinage de m la fonction g définie par $g(x) = f'(m)x + p$.

Exemples :

* On a déjà déterminé ci-dessus que la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point M(3 ; 4) est d'équation $y = 2x - 2$. On en déduit que la fonction g définie par $g(x) = 2x - 2$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de 3.
* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$, représentée par une courbe notée $\mathscr{C}$. On verra dans le paragraphe suivant que $f'(x) = -x + 3$, impliquant que la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse $m = 0$ est d'équation $y = f'(m)(x - m) + f(m) = 3(x - 0) + 1 = 3x + 1$.
  La fonction g définie par $g(x) = 3x + 1$ est alors la meilleure approximation affine de f au voisinage de 0.

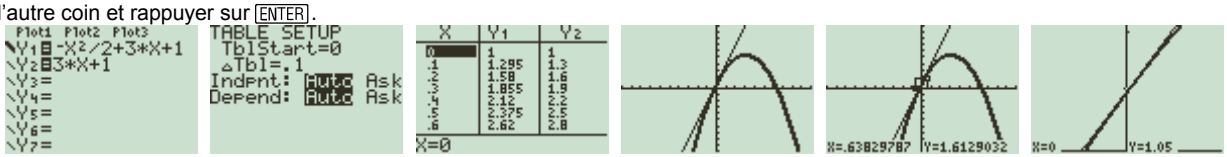
Exercice :

1) Construire un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en utilisant 1 cm comme unité de longueur sur les deux axes, puis représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f ci-dessus : $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$.
   (indication : on pourra faire faire par la calculatrice un tableau de valeurs)
2) Compléter le graphique en dessinant la tangente donnée. Qu'observe-t-on au voisinage de 0 ?
3) Confirmer cette hypothèse en calculant $f(0{,}05)$ et $g(0{,}05)$ à la calculatrice.

Solution :

1)2) Voici la démarche à effectuer sur TI-83 Plus (les captures d'écran de chaque étape se trouvent en-dessous) :

- entrer les fonctions dans l'écran [Y=] (pour faire apparaître $\mathscr{C}$ en plus gros, on peut déplacer le curseur avant Y1 et appuyer sur [ENTER] une fois pour passer de ⋱ à ⋰ (ou plus pour d'autres styles de traits).
- appuyer sur [2nd] puis [WINDOW] pour régler le tableau de valeurs : mettre « .1 » au lieu de 1 dans ΔTbl.
- appuyer sur [2nd] puis [GRAPH] pour accéder au tableau de valeurs (pour voir les valeurs ultérieures, il suffit d'appuyer plusieurs fois sur « ↓ »).
- appuyer enfin sur [GRAPH] pour voir se tracer les deux fonctions !
- pour vérifier l'hypothèse de la question 2, on peut zoomer autour de 0 : appuyer sur [ZOOM] puis [ENTER] (ZBox) : cette fonction zoome sur un rectangle que vous définissez par 2 coins. Il faut se déplacer vers un coin, appuyer sur [ENTER], se déplacer vers l'autre coin et rappuyer sur [ENTER].



3) $f(0{,}05) = 1{,}14875$ et $g(0{,}05) = 1{,}15$. On trouve presque les mêmes résultats !!

	En classe : 28 p. 139 + 6, 9, 13 p. 137	Exercices : 29 p. 139 + 7, 8 p. 137

II – Dérivées de fonctions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tout réel x de I, f admet un nombre dérivé, on dit que f est dérivable sur I et on note $f'(x)$ le nombre dérivé de f en tout x de I. La fonction f' ainsi « créée » est appelée dérivée de f sur I.

Théorèmes

- **Pour tout nombre réel x, si $f(x) = a$, alors $f'(x) = 0$.**
- **Pour tout nombre réel x, si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.**
- **Pour tout nombre réel x, si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.**
- **Pour tout nombre réel x, si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.**
- **Pour tout nombre réel $x \neq 0$, si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.**
- **Pour tout nombre réel x, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors $f'(x) = 2ax + b$.**

Exemple : Si $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$, alors $f'(x) = 5 \times 2x - 4 = 10x - 4$.

Remarques

Ces théorèmes sont admis. Pour les démontrer, il faudrait une autre approche du nombre dérivé…

	En classe : 16 p. 137 + 18, 24 p. 138 + 26 p. 139	Exercices : 17, 19, 25 p. 138 + 27 p. 139

III – Sens de variation

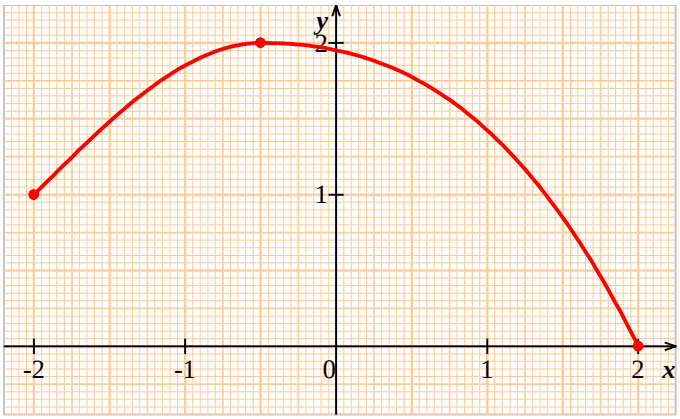
Propriété

- **Si f est croissante sur un intervalle, alors pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) \geqslant 0$.**
- **Si f est décroissante sur un intervalle, alors pour tout x de cet intervalle, $f'(x) \leqslant 0$.**
- **Si f est constante sur un intervalle, alors pour tout x de cet intervalle, $f'(x) = 0$.**

Exemple : On donne la représentation graphique d'une fonction f.
On constate que f est croissante sur $[-2\,;-0{,}5]$ puis décroissante sur $[-0{,}5\,;2]$.

On en déduit le signe du nombre dérivé de la fonction f en $x \in [-2\,;2]$, que l'on peut « astucieusement » donner dans un tableau de signes :

x	-2		$-0{,}5$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	



	En classe : 34 p. 139 + 37, 40 p. 140	Exercices : 35, 36, 38, 39, 41 p. 140

IV – Les coûts marginaux

Soit C une fonction qui représente le coût total de fabrication d'objets en fonction de leur nombre.

Définition

Le coût de fabrication marginal du n-ième objet est le coût correspondant à la fabrication d'un object supplémentaire. Il est donc égal à $C(n+1) - C(n)$.

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction C. Notons A et B les points d'abscisse n et $n+1$. La droite (AB) a pour coefficient directeur

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{C(n+1) - C(n)}{(n+1) - n} = C(n+1) - C(n),$$

c'est-à-dire le coût marginal du n-ième objet. On constate que lorsque n devient grand, la droite (AB) se confond presque avec la tangente au point A (voir animation Géoplan : « coût marginal »), d'où la propriété suivante :

Propriété

Si $C'(n) \neq 0$, alors le coût marginal du n-ième objet peut être confondu avec $C'(n)$. Autrement dit, $C(n+1) - C(n) \approx C'(n)$.

	En classe : 43 p. 141	Exercices : 44 p. 141

Chapitre 9 ~ Probabilités

Dans tout ce chapitre, tous les exemples seront basés sur les trois expériences suivantes :

On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le chiffre sur la face supérieure

On tire au hasard une carte parmi 32 et on regarde la carte obtenue

On tire au hasard une boule dans une urne qui en contient 2 vertes, 3 oranges et 4 bleues. On regarde la couleur de la boule tirée

I – Vocabulaire ensembliste

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience comportant plusieurs issues envisageables et dont on ne peut pas prévoir le résultat en la réalisant. L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire forme son univers, généralement noté Ω. *Dans ce cours, les expériences aléatoires n'auront qu'un nombre fini d'issues.*

Un événement est une condition qui peut être, ou ne pas être, réalisée lors de l'expérience. S'il est réalisé, il peut l'être par une ou plusieurs issues de cette expérience.

Un événement élémentaire est un événement qui n'est réalisé que par une seule issue.

Exemples :

Le dé à 6 faces

Cette expérience admet six issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6

Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}

- *« on obtient 4 » est un événement élémentaire.*
- *« on obtient 7 » est un **événement impossible**.*
- *« on obtient un nombre impair » est un événement réalisé par les issues 1, 3, 5.*

Le jeu de cartes

Cette expérience admet 32 issues possibles.

Ω = {as♠ ; as♡ ; … ; 7◊ ; 7♣}

- *« on obtient as ♡ » est un événement élémentaire.*
- *« on obtient un roi » est un événement non élémentaire (réalisé par 4 issues)*
- *« on obtient 7◊ » est un événement impossible*

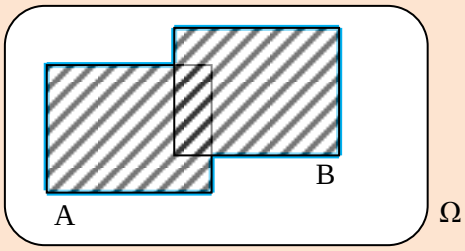
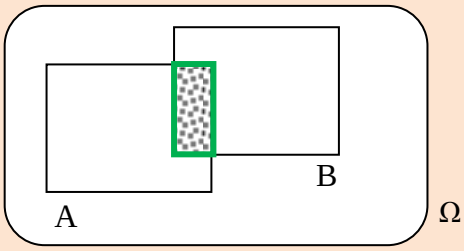
L'urne

Cette expérience admet … issues possibles.

Ω =

- *événement élémentaire :* « on obtient une boule verte »
- *événement non élémentaire :* « on obtient une couleur primaire *(synthèse additive)* [1] »
- *événement impossible :* « on obtient une boule noire »

Les événements peuvent être définis de manière légèrement plus ardue :

∪ (réunion)	∩ (intersection)
	

[1] : *Pour la synthèse additive (lumière), on a rouge, vert et bleu ; pour la synthèse soustractive (peinture & imprimerie), on a magenta, cyan et jaune.*

L'événement « A ou B », noté **A ∪ B**, désigne la réunion des événements A et B. Il est réalisé lorsqu'un des deux événements l'est.	L'événement « A et B », noté **A ∩ B**, désigne l'intersection des événements A et B. Il est réalisé lorsque les deux événements le sont simultanément.

Exemple (le jeu de cartes) : Si A désigne l'événement « obtenir un nombre pair *» et B «* obtenir un multiple de 3 *», alors :* * $A \cup B =$

* $A \cap B =$

Définition

On dit que les événements A et B sont incompatibles s'ils sont disjoints (donc quand A ∩ B = ∅).

Définition

Pour un événement A, l'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, contient l'ensemble des issues n'appartenant pas à A. Il est réalisé lorsque A ne l'est pas !

Exemples :

Le dé à 6 faces	***Le jeu de cartes***	***L'urne***
Si I désigne l'événement « obtenir un nombre pair *», alors $\overline{I}$ désigne l'événement «* obtenir un nombre impair *».*	*Si C désigne l'événement «* obtenir un ♡ *», alors $\overline{C}$ désigne l'événement «* ne pas obtenir un ♡ *».*	*Si B désigne l'événement « obtenir une boule bleue », alors $\overline{B}$ désigne l'événement «* obtenir une boule verte ou orange *».*

Remarque

- A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
- $\overline{\overline{A}} = A$ - $\overline{\varnothing} = \Omega$ - $\overline{\Omega} = \varnothing$ - $A \cup \overline{A} = \Omega$

	En classe : 4 p. 220	

II – Probabilité : définition et propriété

Définition

Une probabilité est une fonction qui à tout événement A d'un univers Ω associe un nombre réel entre 0 et 1, et vérifie les deux propriétés suivantes :

$p(\Omega) = 1$ et si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemples :

Le dé à 6 faces	***Le jeu de cartes***	***L'urne***
si A désigne l'événement « obtenir 5 *», alors p(A) = 1/6. En effet, en « théorie », on a une chance sur 6 d'obtenir 5.* → voir « 09 - dé.xlsx »	*si A désigne l'événement «* obtenir un as de ◊ *», alors p(A) = 1/32.* *Si B désigne «* obtenir une dame *», alors p(B) = 4/32 = 1/8.*	*p(V) = 2/9* *p(B) = 4/9* *p(O) = 3/9* *À quoi correspondent les événements V, B et O ?*

Propriétés

- **Pour tout événement A, on a : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$ et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$;**
- **Un événement impossible a une probabilité nulle : $p(\varnothing) = 0$.**
- **La somme des probabilités des événements élémentaires vaut toujours 1.**

	En classe : 2, 5, 7 p. 220	**Exercices : 3, 6 p. 220 + 8 p. 221**

III – Équiprobabilité

Définition

Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, ont dit qu'il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.

Exemples :

Le dé à 6 faces	***Le jeu de cartes***	***L'urne***
On vérifie facilement que toutes les issues ont la même probabilité (1/6), on a donc une situation d'équiprobabilité.	*A-t-on une situation d'équiprobabilité ?*	*A-t-on une situation d'équiprobabilité ?*

Propriété

Si une expérience aléatoire possède n issues équiprobables, alors :

- la probabilité d'un événement élémentaire est égale à l'inverse de n : $\frac{1}{n}$.

- la probabilité d'un événement A est égale à $\frac{card(A)}{n}$.

Exemples :

Le dé à 6 faces	***Le jeu de cartes***	***L'urne***
• *La probabilité d'un événement élémentaire est égale à* $\frac{1}{6}$. • *Si A désigne l'événement* « obtenir un nombre pair », *alors* $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ *(car il y a 3 nombres pairs : 2, 4 et 6).*	• *La probabilité d'un événement élémentaire est égale à* $\frac{1}{32}$. • *Si B désigne l'événement* « obtenir un ♡ », *alors* $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ *(car il y a 8 cartes ♡).*	• *Les 3 événements élémentaires ont des probabilité différentes.* • *Si C désigne l'événement* « obtenir une couleur primaire », *alors* $p(C) = \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{1}{3}$.

	En classe : **12, 13, 16 p. 221 + 19 p. 222**	**Exercices :** **14, 15 p. 221 + 22 p. 223**

IV – Fréquences

Rappelons que :
* la probabilité d'un événement est la mesure des chances qu'on a de le réaliser ;
* la fréquence d'un événement est la mesure en pourcentages (donc entre 0 et 1 aussi) du nombre d'apparition de cet événement.

Propriété

Si on réalise un grand nombre de fois une expérience aléatoire, alors la fréquence d'apparition d'un événement A se rapproche de se probabilité.

Exemple : Faire lancer 100 fois un dé par chaque élève, et lui faire noter les résultats obtenus. En classe, on synthétisera tous les résultats dans un tableur afin de pouvoir analyser et confronter les résultats individuels et global.

	En classe : **36 p. 226**	**Exercices :** **37 p. 226**