ATTENTION au soin, à l'orthographe, à la rédaction…

Exercice n° 1 (centres d'un cercle) - 8 points

1. a) Montrer successivement que :

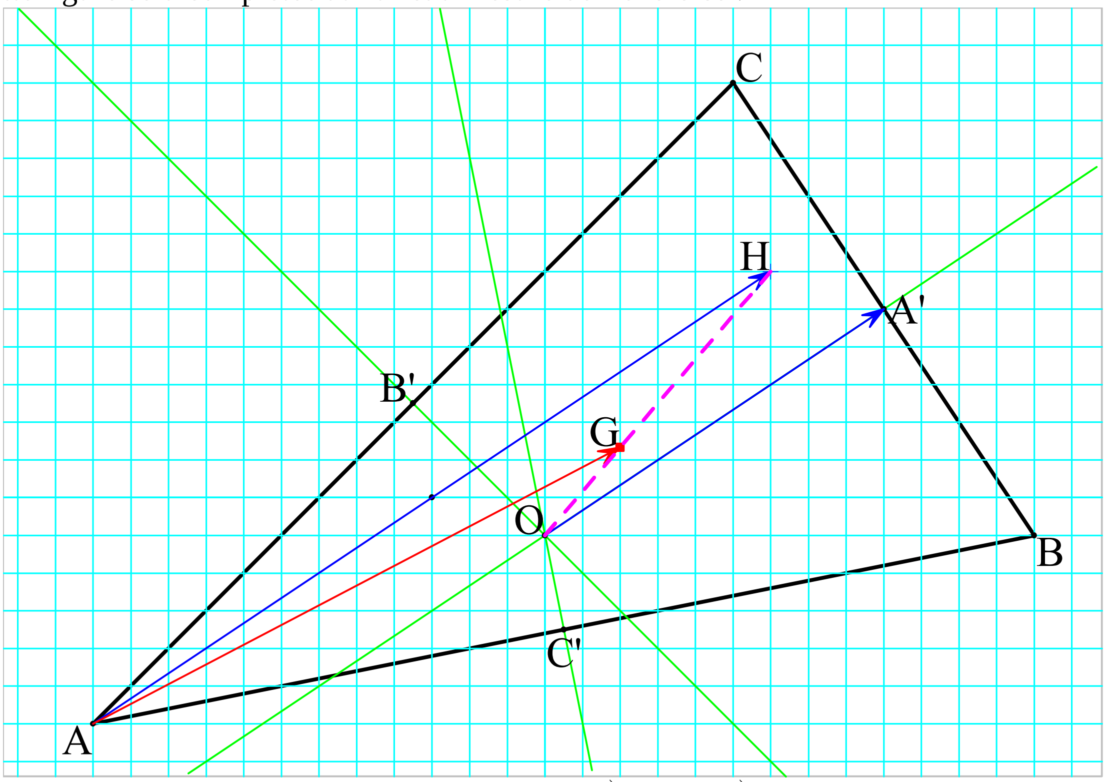
On a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C}$

$= 2\,\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$

$= 2\,\overrightarrow{OA'}$ car A' milieu de [BC] $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'B} = -\,\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$.

On montre de la même manière les deux autres résultats.

b) Cette figure sera complétée au fur et à mesure de l'exercice :



Le point H a été construit grâce à la relation $\overrightarrow{AH} = 3\,\overrightarrow{OA'}$, et le point G grâce à la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}$.

c) On vient de montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires, ou encore que les droites (AH) et (OA') sont parallèles. Or (OA') est perpendiculaire à (BC) car c'est une médiatrice de [BC] (hypothèse de l'énoncé), donc (AH) $\perp$ (BC).
Les deux autres résultats se montrent de la même manière.

d) Le point H, intersection des droites (AH), (BH) et (CH) est donc le point de concours des trois hauteurs du triangle ABC. C'est donc l'orthocentre de ce triangle.

2. a) On a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'A}$

$\Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{GA} = 2\,\overrightarrow{A'A}$ car $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{A'A}$.

Les deux autres résultats se montrent de la même manière.

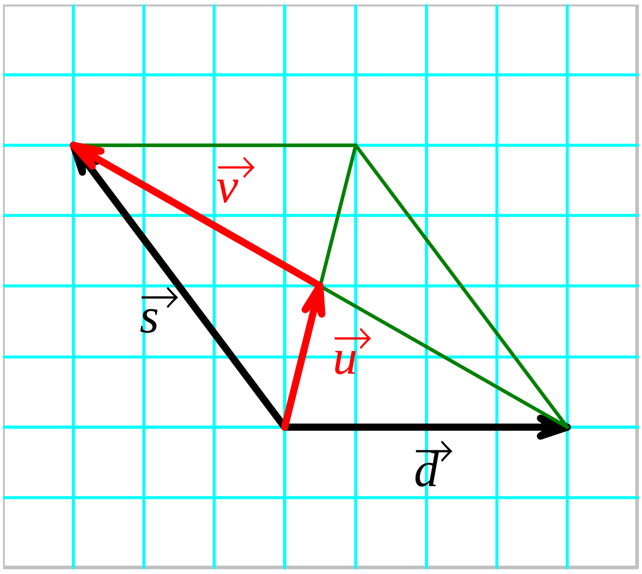
b) Voir la figure ci-dessus.

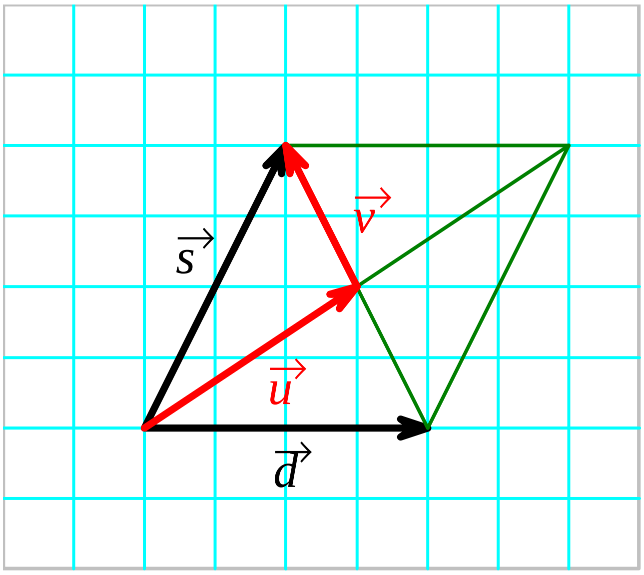
c) On a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\,\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\,\overrightarrow{MG}$, car le point G est tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

d) En appliquant cette égalité, vraie pour tout point M du plan, à M = O, on trouve :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$ (d'après l'énoncé).

e) On peut en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires. Puisqu'ils contiennent le même points O, les trois points O, G et H sont alignés et d'après le rappel, ils forment alors la « droite d'Euler ».

Exercice n° 2 (vecteurs somme et différence) – 6 points





Il suffisait de remarquer que :

$\vec{s} + \vec{d} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u} - \vec{v} = 2\,\vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{s} + \vec{d})$ et $\vec{s} - \vec{d} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{u} + \vec{v} = 2\,\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{s} - \vec{d})$

Pour la construction, on utilisait la règle du parallélogramme pour construire $\vec{u}$ (sans oublier de prendre la moitié !!!), et la relation de Chasles (à partir de $\vec{u}$ et $\vec{s}$) pour construire $\vec{v}$.

Exercice n° 3 (ensembles de points) – 6 points

1. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\,\overrightarrow{MI}$ car I est le milieu de [AB] ;
$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB} = 2\,\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JB} = 2\,\overrightarrow{MJ}$ car J est le milieu de [BC].

2. On a : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\| \Leftrightarrow \|2\,\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{CB}\|$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CB}\| \Leftrightarrow \mathrm{MI} = \frac{1}{2}\mathrm{CB}$.

L'ensemble des points M vérifiant cette égalité est un cercle de centre I et de rayon la moitié de CB (donc JB ou JC).

3. On a : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow \|2\,\overrightarrow{MI}\| = \|2\,\overrightarrow{MJ}\|$
$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\| \Leftrightarrow \mathrm{MI} = \mathrm{MJ}$.

L'ensemble des points M vérifiant cette égalité est la médiatrice du segment [IJ], donc l'ensemble des points à égale distance de I et de J.