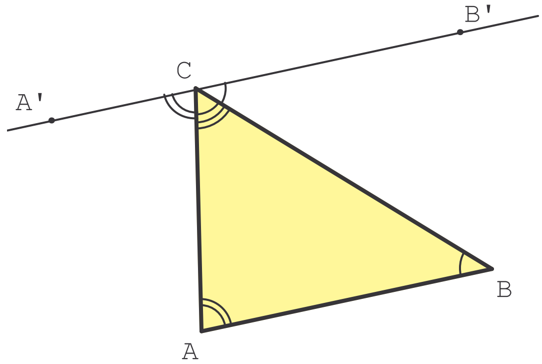
Exercice n° 1 (questions de cours) – 1 + 5 points

1. Propriété : Dans un triangle quelconque, la somme des angles vaut 180°.

   Démonstration : On considère la figure ci-contre, où (A'B') est la droite parallèle à (AB) passant par C. Puisque (AC) coupe ces deux droites, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACA'}$ sont alternes-internes, donc égaux, et il en va de même pour les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAB'}$. Or $\widehat{A'CA}$ + $\widehat{ACB}$ + $\widehat{BCB'}$ est un angle plat, donc mesure 180°, d'où le résultat : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

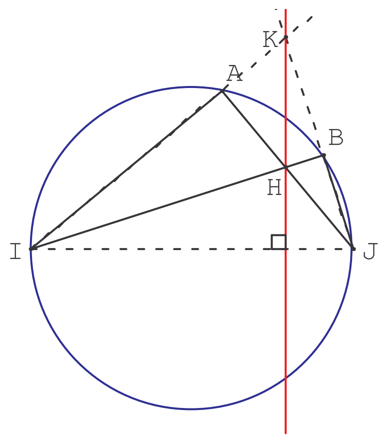


2. Le théorème des milieux dit que dans ce cas, puisque ABC est un triangle, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC], on a (IJ) // (BC).

   Démonstration : Puisque I est le milieu de [AB], on a que $\frac{AI}{AB} = \frac{AI}{2AI} = \frac{1}{2}$. De même, J étant le milieu de [AC], on a $\frac{AJ}{AC} = \frac{AJ}{2AJ} = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$, donc la réciproque du théorème de Thalès nous assure que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

Exercice n° 2 (dans un cercle) – 6 points

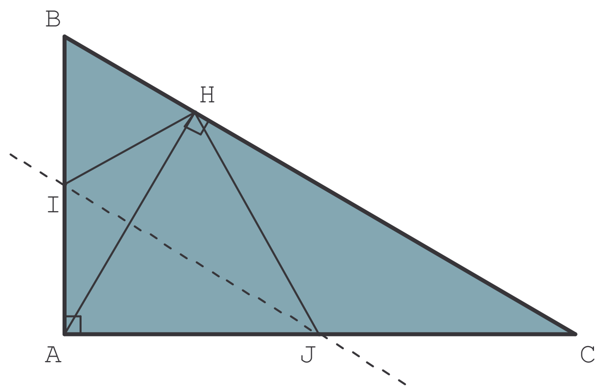
Puisque [IJ] est le diamètre du cercle qui contient les points A et B, une propriété du cours nous permet d'affirmer que les triangles AIJ et BIJ sont respectivement rectangles en A et B. Donc (AJ) ⊥ (IA) et (BI) ⊥ (JB). Or les droites (IA), (BJ) et (IJ) forment le triangle IJK, donc (AJ) et (BI) en sont deux hauteurs.



Nous savons que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'orthocentre, donc (KH) est la troisième hauteur, ce qui implique que (KH) ⊥ (IJ).

Exercice n° 3 (dans un triangle rectangle) – 8 points

1. (AH) étant la hauteur issue de A dans le triangle ABC, (AH) ⊥ (BC), ce qui fait de BHA un triangle rectangle en H. L'hypoténuse est alors un diamètre de son cercle circonscrit, et puisque I est le milieu de [AB], I est le centre de ce cercle. Cela veut dire que IB = IA = IH. Cette dernière égalité nous assure que le triangle AIH est isocèle en I. Nous montrons de la même manière que le triangle AJH est aussi isocèle, en J, en se plaçant dans le triangle rectangle AHC.



2. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, (IJ) // (BC) car I est le milieu de [AB] et J celui de [AC]. Or (AH) ⊥ (BC), donc (IJ) ⊥ (AH). De plus, en se plaçant dans le triangle ABH, on sait que I est le milieu de [AB] et que (IJ) // (BH) (car (BH) = (BC)). D'après la réciproque du

théorème des milieux, la droite (IJ) coupe le troisième côté [AH] en son milieu. Finalement, (IJ) est la droite perpendiculaire à [AH] passant par son milieu, il s'agit bien de la médiatrice de [AH].

3. On considère la symétrie s d'axe (IJ). L'image de I par s est I (puisqu'il se trouve sur l'axe de la symétrie), et l'image de J est J pour la même raison. Puisque (IJ) est la médiatrice de [AH], l'image de A par s est H. On a vu dans le cours qu'une symétrie axiale conserve les angles géométriques, donc l'image de l'angle $\widehat{\text{IAJ}}$, qui est droit, est $\widehat{\text{IHJ}}$, qui est donc aussi droit. On en déduit que les droites (HI) et (HJ) sont perpendiculaires.

Exercice « bonus » n° 4 (l'œuf de poule) – HORS-BARÊME

✓ On commence par déterminer l'aire du demi-disque de diamètre [AB], donc de rayon [OB] d'après le codage de la figure, que l'on note $\mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}\pi\,\text{OB}^2 = \frac{1}{2}\pi\,2{,}5^2 = \frac{1}{2}\pi\,6{,}25 = 3{,}125\,\pi.$$

✓ On détermine ensuite l'aire du secteur angulaire ABA'. Sachant que l'angle géométrique $\widehat{\text{ABA'}}$ vaut 45°, on sait que ce secteur correspond à un huitième de disque complet, on divisera donc par 8 l'aire du disque correspondant à un rayon égal à AB (que l'on note $\mathcal{A}_2$) :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{1}{8}\pi\,\text{AB}^2 = \frac{1}{8}\pi\,5^2 = \frac{1}{8}\pi\,25 = 3{,}125\,\pi.$$

✓ L'aire $\mathcal{A}_3$ du secteur angulaire BAB' est la même que $\mathcal{A}_2$ puisque ces figures sont symétriques par rapport à (OI).

✓ On détermine ensuite l'aire du triangle ABI, qu'il faudra qu'on retire de l'addition finale, faute de quoi elle serait comptée deux fois (une fois dans l'aire du secteur angulaire ABA' et une seconde fois dans l'aire du secteur angulaire BAB'). Pour cela, il faut déterminer la longueur IA :

Remarquons tout d'abord que ABI est isocèle puisque les angles $\widehat{\text{ABI}}$ et $\widehat{\text{BAI}}$ sont égaux. De plus, $\widehat{\text{AIB}} = 180 - \widehat{\text{IAB}} - \widehat{\text{IBA}} = 180 - 45 - 45 = 90°$, donc ABI est aussi rectangle en I. On peut alors le théorème de Pythagore qui nous assure que $\text{IA}^2 + \text{IB}^2 = \text{AB}^2$, c'est-à-dire (puisque IA = IB et AB = 5) $\text{IA} = \sqrt{12{,}5}$. Par suite, l'aire $\mathcal{A}_4$ du triangle ABI vaut :

$$\mathcal{A}_4 = \frac{\text{IA} \times \text{IB}}{2} = \frac{\sqrt{12{,}5} \times \sqrt{12{,}5}}{2} = \frac{12{,}5}{2} = 6{,}25.$$

✓ Il ne reste plus qu'à déterminer l'aire du secteur angulaire IA'B'. Pour cela, il faut d'abord dire que $\widehat{\text{A'IB'}}$ est droit, puisque opposé par le sommet à l'angle $\widehat{\text{AIB}}$ qui est droit. Le secteur angulaire dont on cherche à déterminer l'aire est dont un quart de disque, dont il faut encore calculer le rayon IB' : $\text{IB'} = \text{AB'} - \text{AI} = 5 - \sqrt{12{,}5}$. D'où l'aire $\mathcal{A}_5$ recherchée :

$$\mathcal{A}_5 = \frac{1}{4}\pi\,\text{IB'}^2 = \frac{1}{4}\pi\,(5 - \sqrt{12{,}5})^2 = \frac{1}{4}\pi\,(25 - 10\sqrt{12{,}5} + 12{,}5) = \frac{1}{4}\pi\,(37{,}5 - 10\sqrt{12{,}5})$$
$$= 9{,}375\,\pi - 2{,}5\,\pi\sqrt{12{,}5}.$$

L'aire totale s'obtient alors en faisant le calcul suivant :

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4 + \mathcal{A}_5 = 3 \times 3{,}125\pi - 6{,}25 + 9{,}375\,\pi - 2{,}5\,\pi\sqrt{12{,}5}\ \boxed{\simeq 24{,}89\text{ cm}^2}.$$

Pour ceux qui continueront leur cursus en S, vous apprendrez en terminale à déterminer le volume d'un tel objet. Sachez que pour OB = 2,5, le volume de cet œuf serait de $\boxed{\simeq 82{,}96\text{ cm}^3}$. *Pour notre exercice, on aurait pu poser OB = x (c'est-à-dire ne pas lui donner de valeur fixe), et déterminer l'aire de l'œuf* en fonction de *cette longueur x.*