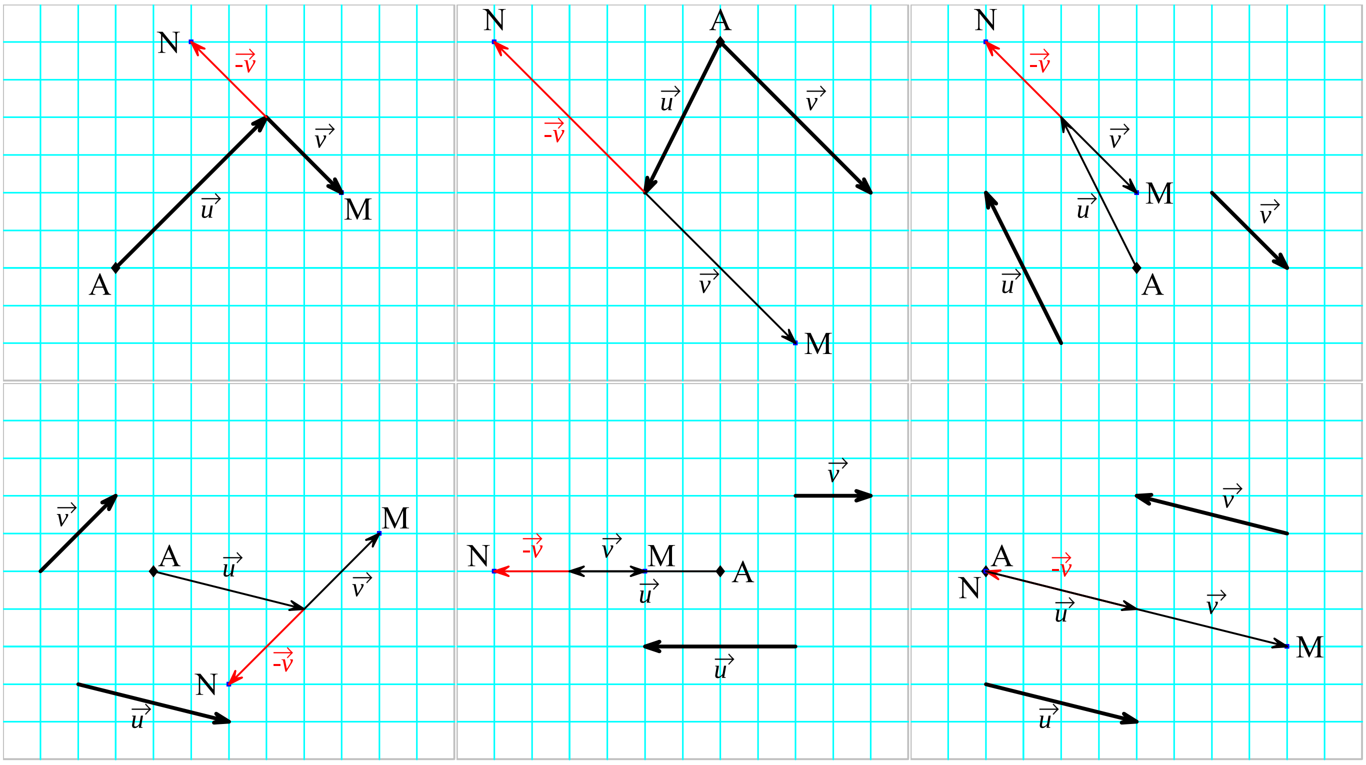
Exercice 1 (sommes et différences de vecteurs) – 6 points



Exercice 2 (petites démonstrations) – 6 points

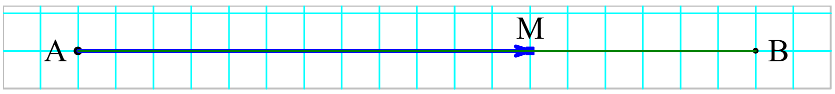
1. Pour tous points A, B, C et D du plan, on a :
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

2. a) Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

   b) Cette dernière égalité est elle-même équivalente à $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\,\overrightarrow{AM} = -\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$.

   D'après le cours, une égalité de la forme $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$, où A est un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné, définit un unique point M.

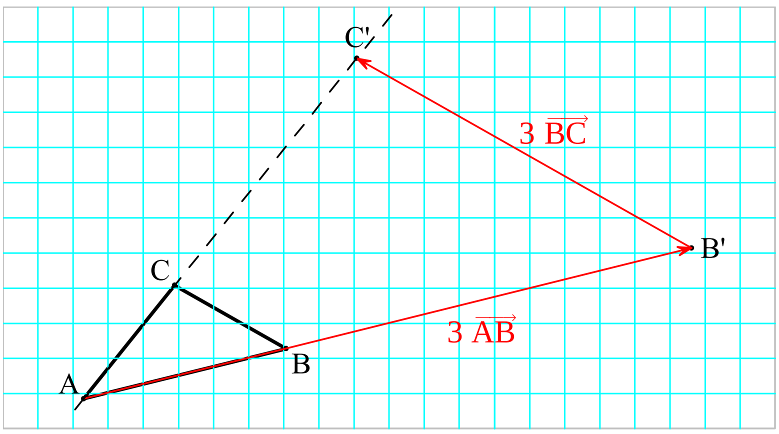
   c) Le vecteur bleu sur la figure correspond à $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$:



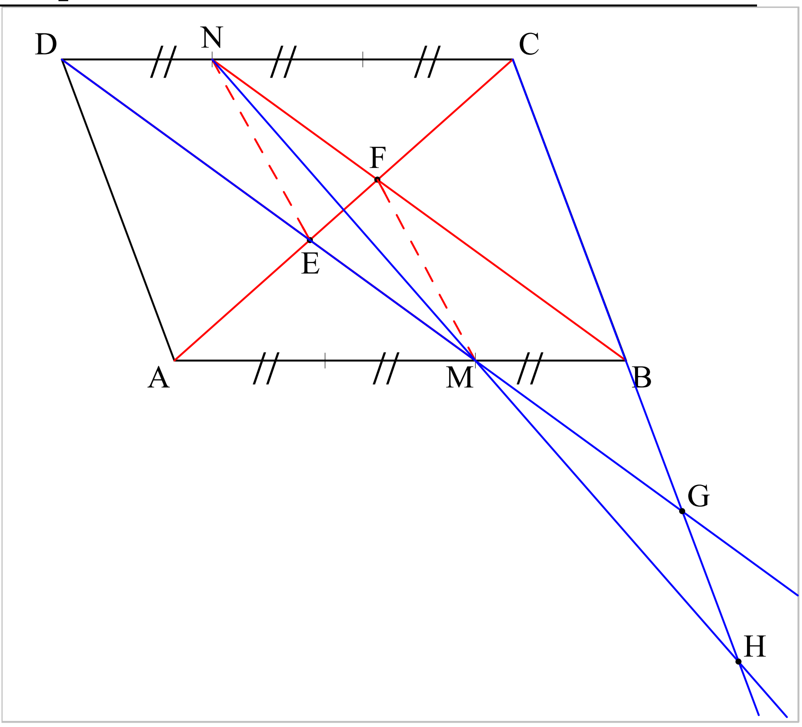
3. a) La figure se trouve ci-contre :

   b) On a : $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'}$
   $= 3\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BC}$
   $= 3\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$
   $= 3\,\overrightarrow{AC}$.

   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et puisqu'ils contiennent tous deux le même point A, on conclut que les points A, C et C' sont alignés.



Exercice 3 (dans un parallélogramme) – 7 points



La figure ci-contre est donnée, et sera complétée au fur et à mesure des questions.

1. Puisque ABCD est un parallélogramme et que N ∈ [CD] et M ∈ [AB], les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont la même direction. Puisqu'ils vont tous deux de gauche à droite, ils ont le même sens, et le codage de la figure nous permet d'affirmer qu'ils ont la même norme. Ces vecteurs sont donc égaux : $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{MB}$. Par conséquent, BMDN est un parallélogramme.

2. * Les deux triangles EAM et EDC forment une configuration de Thalès. Par la réciproque de ce théorème, on a donc :
$$\frac{AM}{CD} = \frac{ED}{EM} = \frac{EA}{EC}.$$
Or AM = 2 MB = 2 DN, et CD = 3 DN, donc on en particulier que
$$\frac{EA}{EC} = \frac{AM}{CD} = \frac{2\,DN}{3\,DN} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow EA = \frac{2}{3}EC.$$
Puisque E, A et C sont alignés, on peut écrire plus précisément, en s'aidant de la figure, que
$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EC} \text{ (bien faire attention au sens).}$$
D'où
$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

   * On utilise une méthode analogue dans les triangles FAB et FNC pour déterminer que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

   * Enfin, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

3. On déduit que la question précédente que $\overrightarrow{FC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$. Puisque $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$ (codage de la figure), on sait que $\overrightarrow{NF} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AM} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EM}$. Le quadrilatère MENF est donc un parallélogramme.

4. a) La réciproque du théorème des milieux permet de conclure directement : en effet, HNC est un triangle vérifiant M ∈ [HN], B ∈ [HC], (MB) // (NC) et $MB = \frac{1}{2}NC$. Donc M est le milieu de [NH] et B celui de [BC].

   b) Puisque l'image d'une intersection est l'intersection des images, le symétrique de G se trouvera sur l'intersection de l'image de (GM) et de l'image de (NN'), donc sur l'intersection de (GM) = (DM) et de (BC) : c'est G'. Puisque G est le milieu de [NN'] et que la symétrie conserve le milieu, G' sera le milieu de [BH].